



TITLE:

# 不規則表面による電磁波散乱理論(Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

川西, 哲也

---

CITATION:

川西, 哲也. 不規則表面による電磁波散乱理論. 京都大学, 1997, 博士(工学)

ISSUE DATE:

1997-07-23

URL:

<https://doi.org/10.11501/3128533>

RIGHT:

# 不規則表面による電磁波散乱理論

川 西 哲 也

1997年2月



# 不規則表面による電磁波散乱理論

川 西 哲 也

1997年2月

# 目次

1 序論	5
1.1 研究の背景	5
1.2 散乱に関する話題	7
1.2.1 異常散乱	8
1.2.2 後方強調散乱	8
1.2.3 随伴強調散乱	9
1.3 研究の目的	11
1.4 解析手法	12
1.5 本論文の構成	12
2 不規則完全導体表面による散乱	15
2.1 不規則表面と電磁場の表現	15
2.1.1 不規則表面	15
2.1.2 シフト作用素	17
2.1.3 Gauss 確率場のスペクトル表現	18
2.1.4 波動ベクトルと偏波ベクトル	19
2.1.5 確率論的 Floquet の定理	21
2.1.6 解の形	21
2.1.7 相反定理	24
2.1.8 光学定理	25
2.1.9 散乱波の統計量	25
2.2 近似解法	28
2.2.1 等価境界条件	28
2.2.2 階層方程式	29
2.2.3 近似解	30
2.3 インコヒーレント散乱分布	36
2.3.1 散乱因子	36

2.3.2	1 次散乱	36
2.3.3	2 次散乱 共偏波および交差偏波後方強調散乱	37
2.4	Wiener 核の構造	47
2.4.1	ベクトル Wiener 核による表現	47
2.4.2	階層方程式	47
2.4.3	積分方程式の 0 次近似	49
2.4.4	積分方程式の高次近似	54
2.4.5	一般解	55
2.4.6	くりこみ理論との比較	57
2.4.7	ベクトル Wiener 核とスカラー Wiener 核の比較	58
3	不規則誘電体導波路による散乱	61
3.1	電磁場の表現	61
3.1.1	波動ベクトルと偏波ベクトル	61
3.1.2	境界条件	64
3.1.3	解の形	64
3.1.4	散乱波動場の統計量	65
3.2	近似解法	67
3.2.1	等価境界条件	67
3.2.2	階層方程式	67
3.2.3	積分方程式の 0 次近似	72
3.2.4	近似解	72
3.3	コヒーレント散乱 — 無損動解 —	75
3.4	1 次インコヒーレント散乱	77
3.4.1	散乱光干渉	77
3.4.2	相反定理	78
3.5	2 次インコヒーレント散乱	84
3.5.1	後方強調散乱	84
3.5.2	随伴強調散乱	84
4	不規則誘電体表面による散乱	91
4.1	電磁場の表現	91
4.1.1	波動ベクトルと偏波ベクトル	91
4.1.2	境界条件	91
4.1.3	解の形	93
4.1.4	散乱波動場の統計量	94

目次	3
4.2 近似解法	96
4.2.1 階層方程式	96
4.2.2 近似解	98
4.3 コヒーレント散乱	100
4.3.1 Brewster 角の変化	101
4.4 インコヒーレント散乱分布	101
4.4.1 散乱 Brewster 角	103
4.4.2 準異常散乱と Yoneda ピーク	105
5 散乱波の偏波特性 — $+45^\circ$ 偏波入射—	125
5.1 散乱波の偏光度	125
5.2 水平散乱と垂直散乱	126
5.3 非対称散乱	127
5.3.1 水平散乱と垂直散乱の干渉	127
5.3.2 電気双極子による放射	127
6 結論	133
A 波動ベクトルの水平成分による表現	137
B Wiener 核における相反定理	141
C インコヒーレント電力の揺らぎ	145



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究の背景

不規則表面による電磁波散乱は身近な現象であり、私たちがものを見るために不可欠な光の乱反射もその一つである。散乱に関する研究の歴史は古く、Maxwell によって電磁波の存在が証明される以前に、裏面反射鏡における散乱波の干渉、いわゆる散乱光干渉が Newton によって発見されている [1, 2]。この現象が実用面から研究課題として提起されたのはレーダの開発が進められた第二次世界大戦前後のことであるが、これは不規則な地表面、海面上での電磁波の散乱・伝搬や不規則な媒質中の伝搬に起因するクラッタエコーなどが問題となったことによる [3]。近年では、人工衛星による地球表面のリモートセンシング [4] や光波による表面プラズモンの励起 [5]、光導波系の不規則面による散乱 [6, 7, 8] など研究の対象となっている。現在、精力的に進められている液晶などのディスプレイ装置の低消費電力化、視認性の向上には乱反射の制御が不可欠であり [9]、また、散乱光を用いた形状測定器などの様々な測定装置も開発されており [10, 11, 12]、不規則表面による電磁波散乱の解析の必要性が高まっている。

不規則な散乱波に起因する現象としては、表面異常散乱 [13]–[16] や後方強調散乱 [17, 18, 19]、Drewster 角の変化 [20, 21]、スペckル現象 [22] などが知られている。表面異常散乱は表面のもつプラズモンモードや導波モードが強く励起されることによるものである。また、後方強調散乱は入射した方向へ際立って強い散乱が生じる現象であり、非常に粗い表面による散乱やモードをもつ表面による散乱でみられることが知られている。これは不規則媒質中を伝搬する波動の局在現象 [23, 24, 25] と関連をもつものと考えられており様々な研究がなされている [26] [36]。

不規則表面による波動散乱は理論的にも興味深い問題で、表面の不規則変動の程度に応じて様々な研究がなされてきた [37, 38, 39]。表面の不規則さを表す量としては入射波長で規格化した表面粗さと表面の傾斜が挙げられる (図 1.1 参照)。本論文では表面の粗さ、傾斜ともに小さい場合を取り扱うが、粗さは大きい傾斜は小さい場合や粗さ、傾斜ともに大きい場合なども考えられる。粗さは大きい傾斜は小さい、すなわち、波長に対して不規則面が滑らかな場合、図 1.2 に示



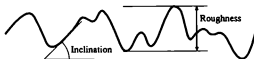


図 1.1: 表面の粗さと傾斜

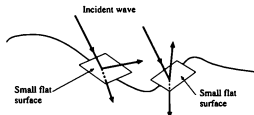


図 1.2: Kirchhoff 近似

すように表面近傍の接平面上では平面波の入射・反射則が成立し、その結果、散乱波が生じるとみなし得る [40]。このような考えに基づく方法を Kirchhoff 近似、物理光学近似などと呼ぶ。この名称は広い開口からの回折・放射の解析で用いる理論との類推による。Kirchhoff 近似は不規則表面による波動散乱で最もよく用いられる方法であって、引き続きその適用範囲の拡張、修正などの研究が進められている [41]。一方、表面粗さが小さい場合、散乱波動場を粗さのパラメータでべき級数展開して、近似的に解く表面摂動法がよく用いられる [42]。表面が不規則でなく周期構造をもつ場合には回折格子となり、図 1.3 に示すように特定の方向に回折波が生じる。回折波は入射波数ベクトルに表面のもつ波数 (Bragg ベクトル) が加算された結果生じるものと説明される。不規則表面の場合、表面は様々な周波数成分からなるので、あらゆる Bragg ベクトルをもつと考えられ、全方向への回折波が生じる。散乱波はこの全方向への回折波からなると考えることができる [38, 42]。多重散乱を表す高次項 (高次散乱) は一般に計算が困難であるが、摂動が小さければ無視でき 1 次項 (1 次散乱) のみで十分よい近似解が得られる場合が多い。しかし、表面に沿う散乱または伝搬効果が大きい場合には (無限) 多重散乱が無視できない効果をもち、初等的な摂動法では解の発散が生じることが知られている。例えば、不規則導体表面に電磁波が入射する場合がそうである。これを多重散乱問題という。多重散乱の取り扱いには現在も大きな研究課題であり、場の量子論で用いられる繰り込みの手法の導入など数多くの工夫がなされている [43]–[56]。この問題に対し、小倉、中山らは統計的な手法である確率汎関数法により解答を与えている [38, 39], [57]–[61]。

図 1.4 に示すような表面上のどの方向に沿ってみても不規則にみえる表面を 2 次元不規則表面

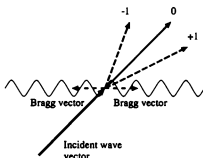


図 1.3: 回折格子

といい、図 1.5 に示すようなある特定の方向 ( $xz$  面内) にのみ不規則性をもつ表面を 1 次元不規則表面という。自然界で広くみられるのは 2 次元不規則表面であるが、取り扱いを容易にするために、理論解析では不規則表面を 1 次元とする場合が多い。入射面が 1 次元不規則表面の不規則性をもつ方向と一致する場合を考えると、散乱波は入射面内だけに生じ、2 次元問題となる (図 1.5 参照)。一方、2 次元不規則表面による散乱の場合、散乱波は様々な方向に生じ、3 次元的解析が必要となる。

電磁波は偏波をもつベクトル波であるが、1 次元不規則表面の場合は TE (s または水平) 偏波成分と TM (p または垂直) 偏波成分が完全に分離できる。つまり、TE 偏波入射時は散乱波も TE 偏波、TM 偏波入射時は散乱波も TM 偏波となり、スカラー波として扱える。2 次元不規則表面の場合は入射波が TE 偏波であったとしても散乱波は TE, TM の両成分をもち、各成分を分離することができず取り扱いが複雑になるので、スカラー波を前提としている理論が多い。

## 1.2 散乱に関する話題

不規則表面に電磁波が入射した場合あらゆる方向への散乱波が生じるということは直観的にも明らかであろう。散乱波の角度分布が一様である場合には、ランベルトの余弦法則にしたがった散乱が生じるが、酸化マグネシウムの微粒子からなる不規則面による散乱がそれによく一致することが知られている [40]。しかし、実際の不規則表面による散乱は、ランベルト則にしたがわない場合がほとんどである。さらに、表面が不規則であるに関わらず特定の方向への強い散乱が生じることが知られており、研究課題として注目されている。

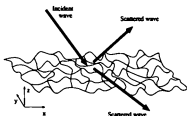


図 1.4: 2次元不規則表面

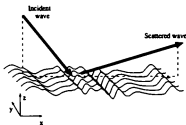


図 1.5: 1次元不規則表面

### 1.2.1 異常散乱

本論文では、表面粗さが小さい場合を考えているので、表面粗さが零、つまり、平坦面のもつ反射・屈折などの特性を反映した散乱分布となることが考えられる。平坦面が表面に沿って伝搬するモードをもつ場合にはこれが強く励起され、散乱ピークとなって現われる。表面に沿って伝搬するモードとしては、完全導体表面上の自由伝搬モード、銀などの負の誘電率をもつ金属表面上の表面プラズモンモード、誘電体導波路の導波モードなどが挙げられる。これらのモードは表面が不規則性をもたない場合には入射波と結合することはなく、外部から励起することはできない。一方、不規則表面の場合には入射波ベクトルに表面のもつ波数ベクトルが加算される。不規則表面はあらゆる波数成分からなるので、必ずモードに一致する散乱波が生じ、モードが励起される。モードをもつ不規則表面による散乱の解析に初等的摂動法では解が発散し、有限解が得られないことはよく知られており [42]、この発散の困難の解消が大きな課題となっている。

### 1.2.2 後方強調散乱

後方強調散乱は入射方向へ逆戻りする方向への散乱、いわゆる後方散乱が際だって強く生じる現象であり、天文学の分野では月の明るさが満月のときに異常に明るいことなどが知られている [62, 63]。そのメカニズムについては現在も活発に議論されているが、ここでは散乱過程のもつ相反性 (時間反転対称性) による説明を紹介する。

不規則な散乱過程は空間反転対称性をもたないが、時間反転対称性のもつので、無数にある散乱過程のうち互いに時間反転の関係にある一対の散乱過程が存在する。図 1.6 に示す Path I と Path II は A・B 間において互いに時間反転の関係にある。入射方向  $\theta_0$ 、散乱方向  $\theta_s$  とすると Path I と Path II の光路差は A'・B と A・B' の部分より生じ

$$L(\sin \theta_0 + \sin \theta_s) \quad (1.1)$$

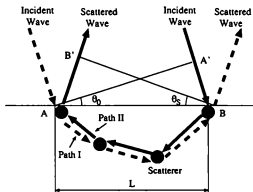


図 1.6: 時間反転散乱過程

となる。後方散乱 ( $\theta_0 = -\theta_s$ ) の場合にはこの光路差は A・B 間の距離  $L$  に無関係に零に等しくなり、干渉により強調散乱が生じる。このように、後方強調散乱は多重散乱過程間の干渉によるものである。多重散乱効果が大きい場合にのみ現われる。一般に、表面粗さが小さい場合には多重散乱の効果は小さく、無視できる程度であるが、表面に沿って伝搬するモードが存在する場合には、モードを介した多重散乱の効果が顕著になる。つまり、異常散乱を起こす表面では多重散乱の効果が顕著であり、後方強調散乱を生じ得るということである。したがって、表面粗さの大きい場合か、表面粗さが小さくかつ表面に沿って伝搬するモードが存在する場合に後方強調散乱が存在することがわかる [17] (図 1.7.1.8 参照)。なお、第 2 章において、交差偏波成分にも後方強調散乱が存在し、これは互いに時間反転の関係にある散乱過程間の干渉では説明できないものであることを示す。

### 1.2.3 随伴強調散乱

誘電体導波路のように複数のモードをもつ 1 次元表面による散乱においては、後方以外の方向への強調散乱が存在することが知られており、これを随伴強調散乱と呼ぶ [6, 7, 8]。前節と同様に粒子的描像で説明する。

図 1.9 に示すように、Path I は入射角  $\theta_0$  で入射した波が点 A で散乱されたものが、さらに点 B で散乱されて散乱角  $\theta_s$  への散乱波となる散乱過程を、Path II は入射角  $\theta_0$  で入射した波が点 B で散乱されたものが、さらに点 A で散乱されて散乱角  $\theta_s$  への散乱波となる散乱過程を表している。Path I, II とも A・B 間は導波モードとして伝搬する。Path I, II が経由するモードが異なる場合、伝搬する距離が等しくとも、伝搬定数の違いから伝搬する距離  $L$  に比例する光路差が生じる。Path

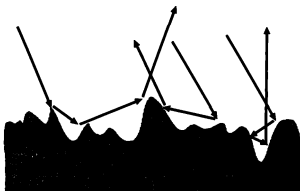


図 1.7: 表面粗さが大きい場合の多重散乱

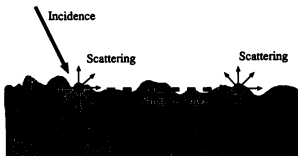


図 1.8: 表面粗さが小さく、表面波モードをもつ場合

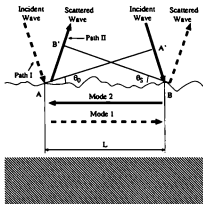


図 1.9: 異なるモードを経由する散乱過程

I がモード 1、Path II がモード 2 を経由する場合の比例定数を  $K_{12}$  とすると、Path I, II 全体での光路差は

$$L(\sin \theta_0 + \sin \theta_s + K_{12}) \quad (1.2)$$

となり、 $\sin \theta_0 + \sin \theta_s + K_{12} = 0$  をみたす方向  $\theta_s$  への散乱においては、Path I, II の光路差が  $L$  に無関係に零に等しくなり強調散乱が生じる。この強調散乱は異なるモード間の干渉によるもので、 $K_{ij}$  のとり値に応じて、複数の方向に存在する。同じモードを経由する場合、明らかに

$$K_{ii} = 0 \quad (1.3)$$

であるので、後方への強調散乱を意味する。つまり、同じモードを経由する散乱過程間の干渉で生じる強調散乱が後方強調散乱、異なるモードを経由する散乱過程間の干渉が随伴強調散乱に相当することがわかる。なお、本節での議論は 1 次元不規則表面に対するものであり、第 3 章において、不規則面が 2 次元である場合には異なるモード間の干渉は打ち消され、随伴強調散乱はみられないことを示す。

### 1.3 研究の目的

これまで述べたように、実用面からの不規則表面による電磁波散乱の解析の必要性は高まっているが、十分実用に耐える理論は未だ確立されていないというのが実状である。現実には 2 次元不規則表面による電磁波 (ベクトル波) の散乱が生じている場合が多いにも拘わらず、これに対

応する理論は数少ない[53] [59]。また、2次元不規則表面による電磁波散乱理論の中でも任意の角度・偏波で入射した場合のあらゆる方向への散乱波を数値計算した例はほとんどない。

本論文では、2次元不規則表面による電磁波散乱を解析する。不規則表面は粗さが小さいとし、導体や誘電体導波路、誘電体からなるとする。不規則性がない平坦面での反射・屈折は著しい偏波特性をもつ。表面粗さが小さい場合の散乱特性はもとの平坦面のもつ性質を反映すると考えられるので、本論文では完全なベクトル波として議論し、散乱波の偏波特性を明らかにする。また、多重散乱効果の一つである後方強調散乱が、最近、注目を集め、様々な研究がされている。この現象は2次散乱以上を考慮に入れて、はじめて見出されることが知られているので、本論文では2次項まで求める。さらに、実際に散乱分布を数値計算し、後方強調散乱をはじめとする様々な現象の性質を明らかにする。

## 1.4 解析手法

本論文では解析手法として、確率汎関数法を用いる。この方法では不規則表面のアンサンブルを考え、統計的なものとして取り扱う[64] [67]。統計的な不規則表面による散乱波動場は不規則表面を表す確率場の汎関数、すなわち不規則表面により生成される確率変数である。また、散乱波動場は不規則表面に対して非線形な応答をする。したがって、散乱波動場は不規則表面の非線形汎関数であるといえる。確率場がGauss分布の場合にはWienerの非線形汎関数解析を用いることが可能である。Wienerの非線形解析では解をWiener-Ito展開と呼ばれる多重積分を含む直交展開で表現し、その展開係数を求めることで解を決定する。さらに、不規則表面に一様性を仮定し、移動に対する群論的な変換性を考慮することにより確率的な波動場の一般形(確率論的Floquetの定理による解)が得られる。本論文では確率論的Floquetの定理によって解の形式を限定し、それをWiener-Ito展開し、不規則表面上で境界条件を満たすように積分核(Wiener核)を決定する。電磁波は2つの偏波成分をもつベクトル波であるのでベクトルWiener核表現を導入し行列形式で理論を展開する。ベクトルWiener核表現を用いることで様々な表面からの散乱を統一的に取り扱うことが可能になる。

## 1.5 本論文の構成

第2章では2次元不規則完全導体表面による電磁波散乱を確率汎関数法により解析する[68]。この問題はこれまでも取り扱われており様々な結果が得られているが、従来の理論形式は複雑でWiener核の構造の議論や高次の近似には適さない。そこで、本論文では散乱因子表現とベクトルWiener核表現を導入した。

散乱因子表現ではWiener核を散乱因子と呼ぶ物理的意味が明確な部分にわけて表現し、Wiener核の物理的解釈を進めるとともに、散乱分布の数値計算法を系統的に整理し効率化を図った。散乱因子のそれぞれが無限回の多重散乱を繰り返込んだ“着物を着た散乱”を表し、また、 $n$ 次のWiener

核は $n$ 回の“着物を着た散乱”からなることを示した。例えば、入射波がTE偏波であるときのTM偏波成分の2次Wiener核はTE偏波からTM偏波へ散乱されたものがさらにTM偏波に散乱された成分と、TE偏波からTE偏波に散乱されたものが2回目の散乱でTM偏波になる成分からなる。

電磁波はベクトル波であり2つの偏波成分をもつので、Wiener核もそれぞれ偏波成分ごとに定義されている。2次元不規則表面は異なる偏波成分間の散乱を起こすので、Wiener核の解法は複雑になる。本論文ではベクトルWiener核表現を導入し、解の構造とその解法を簡潔に取り扱うことで多重散乱の効果が織り込まれるメカニズムの解析を容易にした。その中で不規則表面による散乱がWiener核の次数を変化させることや、発散を抑えるのに必要な多重散乱が量子電磁気学でのくりこみ理論で議論されるものと同等のものであることなどを示した。

散乱因子表現を用いて、1次Wiener核と2次Wiener核によるインコヒーレント散乱分布の数値計算を行った。表面粗さは小さいとしているので低次のウィナー核だけで散乱分布を十分表現できると考えられるが、後方強調散乱や交差偏波散乱は1回の“着物を着た散乱”ではみられず、少なくとも2次までの近似が必要である。実際に2次Wiener核による散乱で共偏波・交差偏波の両成分に後方強調散乱が存在することを確認した。2次Wiener核は入射波が中間状態に散乱された後、さらに2回目の散乱をうけた波動を表すが、後方散乱の場合、同じ経路を互いに逆方向に進む2つの散乱過程が干渉し強調散乱のピークを形成する。また、2次Wiener核のうち中間状態が金属表面がもつ表面波モードである成分の寄与が大きいことも示した。よって、後方強調散乱は互いに逆方向に進む2つの多重散乱(今回の解析では2回散乱のみ)のうち中間状態が表面波モードであるものの干渉の結果であると結論できる。

第3章では2次元不規則誘電体導波路による散乱について述べる[69]。ここでは誘電体導波路を導体平面上の誘電体層からなる構造とし、誘電体層と空気との境界が不規則であるとした。第2章と同様に、確率汎関数法を用いたベクトル形式で解析する。これまでに、1次元不規則誘電体導波路による散乱に関する研究報告があり、誘電体導波路が複数の導波モードをもつ場合には後方強調散乱以外にも強調散乱(随伴強調散乱)の存在が知られている。随伴強調散乱は後方強調散乱と同様に2次散乱においてみられ、中間状態を経由する散乱過程間の干渉によるものであるが、後方強調散乱は中間状態が同じ導波モードである散乱過程間の干渉の結果であるのに対して、随伴強調散乱は異なる導波モードを経由する散乱過程間の干渉によるものである。本論文では、2次元不規則表面の場合の後方強調散乱および随伴強調散乱の性質を明らかにするべく1次、2次散乱分布を計算した。その結果、2次元不規則表面による散乱の場合、随伴強調散乱はみられず、後方強調散乱のみ存在することがわかった。また、Newtonにより発見された散乱光干渉の偏波特性を解析し、その性質を議論した。

第4章では2次元不規則誘電体表面による電磁波散乱について述べる[70]。X線散乱において、臨界角方向への散乱ピークが存在することが知られており、Yonedaピークと呼ばれている[71][76]。Yonedaピークは表面上での不規則な散乱が原因とされており、これまでに不規則表面、



または平坦な表面付近に存在する散乱体による散乱波の解析がなされてきた [77]-[81]。これまでの研究では X 線散乱に限って議論されており、誘電体の相対屈折率が 1 に近い ( $n \sim 0.9999$  程度) として Born 近似を適用したものが多く、本論文では任意の屈折率に対応可能な理論を構築し、可視光領域も含めた、一般の電磁波散乱における臨界角方向への散乱を解析した。その結果、臨界角方向への散乱ピークは X 線散乱特有のものではなく、不規則誘電体表面による電磁波散乱で普遍的にみられる現象であることを明らかにした。また、散乱 Brewster 角と呼ぶ散乱の生じない方向があることを示し、平坦な誘電体表面での反射でみられる Brewster 角と関連をもつことを明らかにした。入射角によっては、散乱 Brewster 角と臨界角方向への散乱ピークが重なり合い、ピークが著しい偏波特性をもつことも明らかにした。さらに、この散乱ピークの形成には、誘電体表面に沿って進むラティラル波が重要な役割を果たしていることを示唆し、相対屈折率が 1 に近い場合にその効果が大きくなることを示した。また、このラティラル波の寄与による後方強調散乱がみられることも明らかにした。

第 5 章では入射波が  $+45^\circ$  偏波である場合の不規則表面による電磁波散乱について述べる [82]。これまでの章では入射波の偏波を TE または TM としていたが、ここではそれに加えて  $+45^\circ$  偏波入射、つまり TE 偏波と TM 偏波の電磁波が同時に入射する場合を取り扱った。電界の表面に水平な成分による散乱 (水平散乱) と垂直成分による散乱 (垂直散乱) に分離して議論した。不規則表面は統計的に一様かつ等方であるとしているので、散乱分布は入射面に対して対称となることが予想されるが、 $+45^\circ$  偏波入射の場合は TE、TM 偏波入射時と異なり、非対称な散乱分布をもつことを明らかにした。これは、入射波の TE 偏波成分による散乱波と TM 偏波成分による散乱波の干渉の結果生じるものであり、電磁波のベクトル波としての性質を顕著に示すものである。

なお、本論文では定常状態のみを議論の対象とし、時間因子  $e^{-i\omega t}$  はすべて省略してある。また、すべての物理量は入射電力が 1 となるように規格化してある。

## 第 2 章

# 不規則完全導体表面による散乱

不規則誘電体導波路や不規則誘電体表面、不規則不完全金属表面による散乱理論の基礎となるものとして、本章では不規則な表面をもつ完全導体による電磁波散乱を取り扱う。確率汎関数法を用い、多重散乱の効果を含む発散のない解を得る。また、2 次散乱まで計算することで後方強調散乱や交差偏波の性質を明らかにする。

2.1 節では確率汎関数法により解の形を定める。2.2 節では不規則表面上での境界条件を満たす Wiener 核を求める。2.3 節では散乱分布の数値計算結果を示し、後方強調散乱、交差偏波などについて議論する。2.4 節ではベクトル Wiener 核表現を導入し、解の構造等について議論する。

### 2.1 不規則表面と電磁場の表現

不規則表面を確率場として取り扱い、その確率場が一様である場合の波動場の形について議論する [38]。

#### 2.1.1 不規則表面

無限に広い平面  $R_2$  に沿った等方で一様な不規則表面を考える。ここでいう等方性、一様性とは統計的性質が方向、位置によらないという意味である。 $R_2$  が  $xy$  平面と一致するような 3 次元の座標系をとると (図 2.1 参照)、不規則表面を表す関数は

$$z = f(\mathbf{x}, \omega) \quad (\mathbf{x} \in R_2, \omega \in \Omega) \quad (2.1)$$

とおける。ここで  $\mathbf{x} \equiv (x, y)$  は  $R_2$  上の位置ベクトル、 $\omega$  は見本空間  $\Omega$  の見本点を表す。次に、不規則表面を表す一様確率場に関する数学的準備をする。一様確率場、すなわち、統計的性質が移動  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$  によって不変な確率場  $f(\mathbf{x}, \omega)$  においては

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \omega) = f(\mathbf{x}, T^{\mathbf{a}}\omega) \quad (2.2)$$

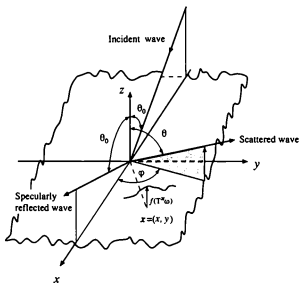


図 2.1: 完全導体表面による電磁波散乱の全体図

なる  $T^a$  を定義することができる [63]。定義より明らかなように  $T^a$  は以下のような加法群の性質をもつ。

$$T^{a+b} = T^a T^b, \quad T^0 = I \quad (\text{identity}) \quad a, b \in R_2 \quad (2.3)$$

また (2.2) より

$$f(x, \omega) = f(o, T^x \omega) \quad (2.4)$$

$$= f(T^x \omega) \quad \text{ただし, } f(\omega) \equiv f(o, \omega) \quad (2.5)$$

となり、一様確率場は  $x = o$  における値に  $T^x$  を作用させたものとして表現できる。

### 2.1.2 シフト作用素

ここで、シフト作用素  $D^a$  を

$$D^a \psi(x, \omega) = \psi(x + a, T^{-a} \omega) \quad (2.6)$$

で定義する。定義より明らかなように  $D^a$  もまた以下のような加法群の性質を持つ。

$$D^{a+b} = D^a D^b, \quad D^0 = I \quad (\text{identity}) \quad a, b \in R_2 \quad (2.7)$$

また、一様確率場  $u(T^x \omega)$  に  $D^a$  を作用させると

$$D^a u(T^x \omega) = u(T^{x+a} T^{-a} \omega) \quad (2.8)$$

$$= u(T^{x+a-a} \omega) \quad (2.9)$$

$$= u(T^x \omega) \quad (2.10)$$

となり  $u(T^x \omega)$  は  $D^a$  不変であることがわかる。次に  $D^a$  の固有関数について考える。

$$D^a \psi(x, \omega) = \Lambda^a \psi(x, \omega) \quad (2.11)$$

となるとき  $\Lambda^a$  は  $D^a$  の固有値である。(2.7) より  $\Lambda^a$  は

$$\Lambda^{a+b} = \Lambda^a \Lambda^b, \quad \Lambda^0 = 1 \quad (2.12)$$

を満たすことがわかる。ここで  $\Lambda^a = e^{i\lambda \cdot a}$  とし、固有値  $e^{i\lambda \cdot a}$  をもつ固有関数を  $\phi(x, \omega | \lambda)$  と表すと

$$D^a \phi(x, \omega | \lambda) = e^{i\lambda \cdot a} \phi(x, \omega | \lambda) \quad (2.13)$$

となる。このような固有関数  $\phi$  は一般に

$$\phi(x, \omega | \lambda) = e^{i\lambda \cdot x} u(T^x \omega) \quad (2.14)$$

の形をもち、また、一般の確率場はこのような固有関数の和で表すことができる [64]。

$$\psi(\mathbf{x}, \omega) = \int_{R_2} \phi(\mathbf{x}, \omega | \lambda) d\lambda \quad (2.15)$$

$$= \int_{R_2} e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}} u(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega) d\lambda \quad (2.16)$$

ただし、 $\lambda \equiv (\lambda_x, \lambda_y)$ ,  $d\lambda \equiv d\lambda_x d\lambda_y$  である。

### 2.1.3 Gauss 確率場のスペクトル表現

不規則表面の確率分布は Gauss 分布であるとする。(2.1) をスペクトル表現すると

$$z = f(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega) = \int e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}} F(\lambda) dB(\lambda, \omega) \quad (2.17)$$

となる [64]。ここで、 $dB(\lambda, \omega)$  は微分 Gauss 確率変数で以下のような性質をもつ (以後、 $\omega$  は省略することがある)。

$$\langle dB(\lambda) \rangle = 0 \quad (2.18)$$

$$\langle \overline{dB(\lambda)} dB(\lambda') \rangle = d\lambda \quad (\lambda = \lambda') : = 0 \quad (\lambda \neq \lambda') \quad (2.19)$$

$$\overline{dB(\lambda)} = dB(-\lambda) \quad (2.20)$$

ここで、 $\langle \rangle$  は集合平均を表す。また  $f(x)$  の実数性より

$$\overline{F(\lambda)} = F(-\lambda) \quad (2.21)$$

が成り立つ。相関関数と分散は

$$R(\mathbf{x}) = \langle \overline{f(\omega)} f(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega) \rangle = \int_{R_2} e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (2.22)$$

$$\sigma^2 = R(0) = \int_{R_2} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (2.23)$$

となる。ここで  $|F(\lambda)|^2$  は不規則表面のスペクトル密度 (電力密度) を与え、 $\sigma$  は表面粗さを意味する。不規則表面は一様であると同時に等方でもあるとするので、相関関数も等方であり、スペクトル表現 (2.22) は

$$R(\rho) = 2\pi \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) |F(\lambda)|^2 \lambda d\lambda \quad (2.24)$$

$$\rho \equiv |\mathbf{x}|, \quad \lambda \equiv |\lambda| \quad (2.25)$$

と書き換えられる。ここで  $J_0$  は 0 次ベッセル関数を表す。次に、等方な相関関数とスペクトルの例を示す。

$$R(\rho) = \sigma^2 e^{-\rho^2/(4l^2)}, \quad |F(\lambda)|^2 = \sigma^2 \frac{l^2}{\pi} e^{-l^2 \lambda^2} \quad (2.26)$$

$$R(\rho) = \frac{\sigma^2}{2^{n-1}(n-1)!} (\kappa \rho)^n K_n(\kappa \rho), \quad |F(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2 n \kappa^{2n}}{\pi(\lambda^2 + \kappa^2)^{n+1}} \\ n = 2, 3, \dots \quad (2.27)$$

ただし、 $K_n$  は  $n$  次第 2 種変形ベッセル関数で以下のような性質を持つ。

$$z^n K_n(z) \simeq 2^{n-1} (n-1)! \quad (z \simeq 0) \quad (2.28)$$

$$K_n(z) \sim \sqrt{\pi/(2z)} e^{-z} \quad (z \rightarrow \infty) \quad (2.29)$$

(2.26) は Gauss 形のスペクトルで  $l$  が相関距離に相当するパラメータである。(2.27) は有理形のスペクトルで  $1/\kappa$  が相関距離に相当する。また、Gauss 形のスペクトルは任意の高次微係数が存在する滑らかな不規則表面に対応する。有理形スペクトルの場合は 1 次微分が存在するためには  $n \geq 2$ 、2 次微分が存在するためには  $n \geq 3$  が必要である。

なお、本論文では数値計算において (2.26) で表される Gauss 形スペクトルをもつ不規則表面を仮定する。 $l, \sigma$  が不規則表面を特徴付けるパラメータとなる。

### 2.1.4 波動ベクトルと偏波ベクトル

ベクトル平面波に関し  $xy$  平面を基準にした直線偏波を定義する。散乱波動ベクトル  $k$  を

$$k = \lambda + \text{sign}([k]_z) S(\lambda) e_z \quad (2.30)$$

$$k = |k|, \quad \lambda = |\lambda| \quad (2.31)$$

$$S(\lambda) \equiv \sqrt{k^2 - \lambda^2} \quad (2.32)$$

$$\text{ただし, } \arg S(\lambda) = \begin{cases} 0 & (k^2 \geq \lambda^2) \\ \pi/2 & (k^2 < \lambda^2) \end{cases}$$

とおく。 $\lambda$  は  $k$  の  $xy$  平面への射影、 $S(\lambda)$  は  $z$  成分である。以後、 $\lambda$  を用いて波動を表現する (付録 A 参照)。ここで  $\text{sign}([k]_z)$  は  $k$  の  $z$  成分が正であるときに +1、負であるときに -1 となる符号関数であるとする。また、 $k$  を空気中に入射電磁波の波数 (時間因子は  $e^{-i\omega t}$ )、 $\epsilon, \mu$  をそれぞれ誘電率、透磁率であるとする。

$k$  に対応する TE (水平 または s) 偏波および TM (垂直 または p) 偏波ベクトル  $e_H(k), e_V(k)$  を

$$e_H(k) \equiv \frac{k \times e_z}{|k \times e_z|} \quad (2.33)$$

$$e_V(k) \equiv \frac{k \times e_H(k)}{|k \times e_H(k)|} \quad (2.34)$$

と定義する。これらの、ベクトルは以下のような性質を持つ

$$k \cdot e_H(k) = k \cdot e_V(k) = e_H(k) \cdot e_V(k) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{k}{k} \times e_H(k) = e_V(k) \quad (2.36)$$

$$e_H(k) \times e_H(k) = \frac{k}{k} \quad (2.37)$$

$$e_V(k) \times \frac{k}{k} = e_H(k) \quad (2.38)$$

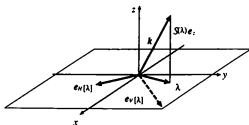


図 2.2: 水平 (TE or s), 垂直 (TM or p) 偏波の定義

つまり、

$$\left[ \frac{k}{k}, e_H(k), e_V(k) \right] \quad (2.39)$$

が右手系をなす(図2.2参照)。また、 $e_H(k)$  は  $xy$  平面内にある。さらに、偏波ベクトルを  $\lambda$  を用いて表すと

$$e_H[\lambda] \equiv e_H(k) = \frac{\lambda \times e_z}{\lambda} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} e_V[\lambda] \equiv e_V(k) &= \frac{k \times (\lambda \times e_z)}{k\lambda} \\ &= \frac{\lambda(k \cdot e_z) - e_z(k \cdot \lambda)}{k\lambda} \\ &= \frac{\text{sign}([k]_z) S(\lambda) \lambda - e_z \lambda^2}{k\lambda} \\ &= \text{sign}([k]_z) \frac{S(\lambda)}{k\lambda} \lambda - \frac{\lambda}{k} e_z \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。また、(2.40), (2.41) を  $xy$  平面成分と  $z$  方向成分とに分けると

$xy$  平面成分

$$e_H[\lambda] = \frac{\lambda \times e_z}{\lambda} \quad (2.42)$$

$$e_{V,xy}[\lambda] = \frac{S(\lambda)}{k\lambda} \lambda \quad (2.43)$$

$z$  方向成分

$$e_{V,z}[\lambda] = -\frac{\lambda}{k} e_z \quad (2.44)$$

と表現できる。

## 2.1.5 確率論的 Floquet の定理

電界  $E$  の満たすべき波動方程式は

$$(\nabla^2 + k^2)E(\mathbf{x}, z; \omega | \lambda_0) = 0 \quad (2.45)$$

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (2.46)$$

である。また、境界条件は表面が完全導体すなわち表面に沿った電界はゼロであるとする

$$\mathbf{n} \times E = 0 \quad \text{on } z = f(T^x \omega) \quad (2.47)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f - \mathbf{e}_z}{(|\nabla f|^2 + 1)^{1/2}} \quad (2.48)$$

となる。したがって、(2.45) - (2.47) を満たすような  $E$  を求めることが目標となる。波動方程式、境界条件は  $D^a$  不変であるので  $E$  が解ならば  $D^a E$  も解である。そこで  $E$  が  $D^a$  の固有関数である解を求める。

電界  $E$  を入射波と表面が平坦である場合の反射波、すなわち鏡面反射波をあわせた成分 (以後、これを主波部分と呼ぶ)  $E_0$  と不規則性による散乱波部分  $E_S$  にわける。

$$E(\mathbf{x}, z; \omega | \lambda_0) = E_0(\mathbf{x}, z | \lambda_0) + E_S(\mathbf{x}, z; \omega | \lambda_0) \quad (2.49)$$

平面波が入射する場合を考えると

$$D^a E_0(\mathbf{x}, z | \lambda_0) = E_0(\mathbf{x} + \mathbf{a}, z | \lambda_0) = e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{a}} E_0(\mathbf{x}, z | \lambda_0) \quad (2.50)$$

となるので  $E_0$  は  $e^{i\lambda \cdot \mathbf{a}}$  を固有値とする固有関数である。よって、 $E$  全体が固有関数であるとする固有値は  $e^{i\lambda \cdot \mathbf{a}}$  である。(2.14) よりこのような固有関数は指数関数と一様確率場の積で表すことができる<sup>1</sup>。したがって、入射波が平面波である場合の確率波動場の一般形は

$$E(\mathbf{x}, z; \omega | \lambda_0) = e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x}} \{U_0(z | \lambda_0) + U(z; T^x \omega | \lambda_0)\} \quad (2.51)$$

で与えられる。右辺第一項は主波部分、第二項は不規則表面による散乱波部分を表す。なお、散乱波部分は確率場であるが主波部分は見本点パラメータ  $\omega$  に依存しない。この一般形は周期表面に対する Floquet の定理 [67] のアナログを表し、一様不規則表面に対する確率論的な Floquet の定理に相当するものである。したがって、波動場  $E$  を解くことは一様確率場  $U$  を求めることに帰着する。

## 2.1.6 解の形

確率論的 Floquet の定理による解 (2.51) の主波部分は TE 偏波入射、TM 偏波入射の場合を考えると

$$U_0(z | \lambda_0) = \begin{cases} -e_H(k'_0) e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS(\lambda_0)z} + e_H(k_0) e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} + iS(\lambda_0)z} & (\text{TE 入射}) \\ e_V(k'_0) e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS(\lambda_0)z} + e_V(k_0) e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} + iS(\lambda_0)z} & (\text{TM 入射}) \end{cases} \quad (2.52)$$

<sup>1</sup>ここでは一様確率場がベクトル場であることに注意。



与えられる。 $k'_0, k_0$ はそれぞれ $\lambda_0$ に対応する入射波ベクトル、鏡面反射波ベクトルであり

$$k'_0 = \lambda_0 - S(\lambda_0)e_z, \quad k_0 = \lambda_0 + S(\lambda_0)e_z \quad (2.53)$$

と定義される。散乱波部分は Gauss 不規則表面を表す関数  $f(T^x \omega)$  の汎関数である。このような汎関数は一般に Gauss 変数  $dB(\lambda)$  の多変数直交多項式、すなわち多変数 Hermite 多項式によって直交展開が可能である [64, 65]。これが Wiener-Ito の展開定理である。 $U(z; T^x \omega | \lambda_0)$  は2つの偏波成分をもつので以下に示すように偏波成分ごとの Wiener-Ito 展開ができる。

$$U(z; T^x \omega | \lambda_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z; T^x \omega | \lambda_0) \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} U_n(z; T^x \omega | \lambda_0) = & \int \dots \int e^{i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot x + iS(\lambda_0 + \dots + \lambda_n) \cdot z} \\ & \times \{e_H[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ & + e_V[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)\} \\ & \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \end{aligned} \quad (2.55)$$

ここで、積分内の指数関数は

$$e^{i\lambda_0 \cdot x} U_n(z; T^x \omega | \lambda_0) \quad (2.56)$$

が波動方程式 (2.45) を満たす平面波となるように選んである。 $\hat{h}_n$  は  $n$  変数の複素 Hermite 多項式を用いた  $dB(\lambda)$  の  $n$  変数多項式である。低次のものを以下に示す。

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= 1 \\ \hat{h}_1[dB(\lambda)] &= dB(\lambda) \\ \hat{h}_2[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] &= dB(\lambda_1) dB(\lambda_2) - \delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ \hat{h}_3[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), dB(\lambda_3)] &= dB(\lambda_1) dB(\lambda_2) dB(\lambda_3) \\ &\quad - [\delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 dB(\lambda_3) + \delta(\lambda_2 + \lambda_3) d\lambda_2 d\lambda_3 dB(\lambda_1) \\ &\quad + \delta(\lambda_3 + \lambda_1) d\lambda_3 d\lambda_1 dB(\lambda_2)], \quad \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

また、平均に関して次のような直交性をもつ。

$$\begin{aligned} \langle \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \hat{h}_m[dB(\mu_1), \dots, dB(\mu_m)] \rangle = \\ \delta_{nm} \delta_{ij}^n d\lambda_1 \dots d\lambda_n d\mu_1 \dots d\mu_m \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\delta_{ij}^n \equiv \sum_{\text{all pair } (i,j)} \prod \delta(\lambda_{i_p} - \mu_{j_p}) \quad (2.59)$$

ここで、 $\delta_{ij}^n$  は2組の  $n$  個の添字  $i \equiv (i_1, \dots, i_n), j \equiv (j_1, \dots, j_n)$  から1つずつ取りだした添字の対  $(i_{p_1}, j_{p_1})$  に対し  $\delta(\lambda_{i_{p_1}} - \mu_{j_{p_1}})$  をつくり、そのようなデルタ関数の  $n$  個の積をすべての組合せについて加えたものである。

(2.55) の  $n$  重積分を  $n$  重 Wiener 積分、またその展開係数すなわち積分核  $A_n^H, A_n^V$  を  $n$  次 Wiener 核と呼ぶ。Wiener 核  $A_n^H, A_n^V$  はパラメータ  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  に関して対称である。

また、磁界成分  $H$  は

$$H = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times E \quad (2.60)$$

で与えられるので解の形は以下になる。

#### TE 偏波入射

$$\begin{aligned} E(x, z; \omega | \lambda_0) &= -e_H(k'_0) e^{i\lambda_0 x - iS(\lambda_0)z} + e_H(k_0) e^{i\lambda_0 x + iS(\lambda_0)z} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \int \dots \int e^{i(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)x + iS(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)z} \\ &\quad \times \{ e_H[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ &\quad + e_V[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \} \\ &\quad \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} Z_0 H(x, z; \omega | \lambda_0) &= -e_V(k'_0) e^{i\lambda_0 x - iS(\lambda_0)z} + e_V(k_0) e^{i\lambda_0 x + iS(\lambda_0)z} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \int \dots \int e^{i(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)x + iS(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)z} \\ &\quad \times \{ e_V[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ &\quad - e_H[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \} \\ &\quad \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \end{aligned} \quad (2.62)$$

#### TM 偏波入射

$$\begin{aligned} E(x, z; \omega | \lambda_0) &= e_V(k'_0) e^{i\lambda_0 x - iS(\lambda_0)z} + e_V(k_0) e^{i\lambda_0 x + iS(\lambda_0)z} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \int \dots \int e^{i(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)x + iS(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)z} \\ &\quad \times \{ e_H[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ &\quad + e_V[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \} \\ &\quad \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$Z_0 H(x, z; \omega | \lambda_0) = -e_H(k'_0) e^{i\lambda_0 x - iS(\lambda_0)z} - e_H(k_0) e^{i\lambda_0 x + iS(\lambda_0)z}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} \int \cdots \int e^{i(\lambda_0 + \cdots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} + iS(\lambda_0 + \cdots + \lambda_n) \cdot \mathbf{z}} \\
& \times \{ e_V[\lambda_0 + \cdots + \lambda_n] A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\
& \quad - e_H[\lambda_0 + \cdots + \lambda_n] A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \} \\
& \quad \times \dot{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \quad (2.64)
\end{aligned}$$

ただし、 $Z_0 = \omega_0 \mu / k$  は自由空間の固有インピーダンス

### 2.1.7 相反定理

2つの異なった入射波に対する解  $E_1, H_1, E_2, H_2$  を考えると<sup>2</sup>

$$\nabla \cdot (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}
& = (\nabla \times E_1) \cdot H_2 - E_1 \cdot (\nabla \times H_2) \\
& \quad - (\nabla \times E_2) \cdot H_1 + E_2 \cdot (\nabla \times H_1) \quad (2.66)
\end{aligned}$$

$$= i\omega_0 \mu (-H_1 \cdot H_2 + H_2 \cdot H_1) + i\omega_0 \epsilon (-E_1 \cdot E_2 + E_2 \cdot E_1) = 0 \quad (2.67)$$

が得られる。さらに、Gauss の定理より

$$\int [E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1] \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.68)$$

とできる。上式の面積分をランダム表面上の円筒部分 (半径:  $\rho$ ) で行なう。

$$\int_{S_t + S_c} [E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1] \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.69)$$

$$S_t : \text{円筒上面} \Rightarrow \rho^2 \text{に比例}$$

$$S_c : \text{円筒側面} \Rightarrow \rho \text{に比例}$$

円筒底部の面積分は境界条件によりゼロとなる。さらに、 $\rho \rightarrow \infty$  とすると側面の寄与は無視できて

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{S_t} [E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1]_z d\mathbf{x} = 0 \quad (2.70)$$

となる。これより Wiener 核におけるの相反定理が得られる。(付録 B 参照)

$$A_0^{HH}(\lambda_0) = A_0^{HH}(-\lambda_0) \quad (2.71)$$

$$A_0^{VV}(\lambda_0) = A_0^{VV}(-\lambda_0) \quad (2.72)$$

$$A_0^{VH}(\lambda_0) = A_0^{HV}(-\lambda_0) \quad (2.73)$$

$$a_n^{HH}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = a_n^{HH}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | -\lambda'_0) \quad (2.74)$$

<sup>2</sup>つまり、 $\nabla \times E_1 - i\omega_0 \mu H_1 = 0, \nabla \times H_1 + i\omega_0 \epsilon E_1 = 0$  を満たす。

$$a_n^{VV}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = a_n^{VV}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | -\lambda'_0) \quad (2.75)$$

$$a_n^{VH}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = a_n^{HV}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | -\lambda'_0) \quad (2.76)$$

$$\lambda'_0 = \lambda_0 + \dots + \lambda_n, n = 1, 2, \dots \quad (2.77)$$

ただし、

$$A_n^\nu(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = S(\lambda_0) a_n^\nu(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \quad n = 1, 2, \dots \quad \nu = HH, VV, VH, HV \quad (2.78)$$

ここで、 $A_n^{HH}, A_n^{VV}$  はそれぞれ、TE 偏波入射による TE 偏波散乱波、TM 偏波散乱波、 $A_n^{HV}, A_n^{VH}$  はそれぞれ、TM 偏波入射による TE 偏波散乱波、TM 偏波散乱波の Wiener 核を表す<sup>3</sup>。これらの式は散乱の可逆性、すなわち時間反転対称性を意味する。

### 2.1.8 光学定理

複素ポインティングベクトルを  $P = [E \times H]$  とすると、エネルギー保存則より

$$\nabla \cdot [\text{Re} P] = \nabla \cdot \left[ \text{Re} \frac{E \times H}{2} \right] = 0 \quad (2.79)$$

が成り立つ。(2.67) - (2.70) と同様にすれば

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \rho^2} \text{Re} \int_{S_\rho} e_z \cdot \frac{1}{2} [E \times H] dz = \frac{1}{2} \text{Re} [e_z \cdot \langle E \times H \rangle] = 0 \quad (2.80)$$

が得られる。ここで、単位面積あたりの  $z$  方向の平均エネルギー流はエルゴード性により集合平均に等しくなるということを用いた。TE 偏波入射の場合の解 (2.61) を (2.80) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{S(\lambda_0)}{k} &= \frac{S(\lambda_0)}{k} \left\{ |1 + A_0^H(\lambda_0)|^2 + |A_0^V(\lambda_0)|^2 \right\} \\ &+ \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \cdots \int_{|\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n|^2 < k^2} S(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \\ &\times \left\{ |A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 + |A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 \right\} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \end{aligned} \quad (2.81)$$

が得られる。TM 偏波入射の場合では上式で  $A_0^H, A_0^V$  を入れ替えたものが得られる。右辺第一項はコヒーレント波、第二項以下はインコヒーレント波による  $z$  方向への平均散乱電力であり、左辺は入射電力に相当する。ここで、コヒーレント波とは確率波動場の平均部分、インコヒーレント波は平均を除いた部分のことである。

### 2.1.9 散乱波の統計量

Wiener 核  $A_n^H, A_n^V$  が求まれば、確率波動場は (2.54), (2.55) のように確率汎関数の形で表現されているので、不規則表面を表す関数 (2.1) を与えると、つまり見本パラメータ  $\omega$  を 1 つ選ぶと不規則な散乱波を数値的に計算できる。また、散乱波の各種の統計量は以下に示すようにすべて Wiener 核  $A_n^H, A_n^V$  で表現できる [39]。

<sup>3</sup>以後、 $A_n^{HH}$  で表される散乱を TE-TE 散乱、 $A_n^{HV}$  を TE-TM 散乱、 $A_n^{VH}$  を TM-TE 散乱、 $A_n^{VV}$  を TM-TM 散乱と呼ぶ。一方、 $A_n^H$  が TE 偏波散乱波、 $A_n^V$  が TM 偏波散乱波を意味しており、例えば (2.63) の  $A_0^H$  は  $A_0^{HV}$  に相当するが、入射波の偏波を問題としない場合や、入射波の偏波が明らかで混乱を生じない場合は  $A_n^H, A_n^V$  の表記を用いる。

## コヒーレント散乱

確率波動場の平均部分をコヒーレント波と呼ぶ。(2.61), (2.63) を平均すると、

$$\begin{aligned} \langle E(x, z; \omega | \lambda_0) \rangle &= -e_H(k'_0) e^{i\lambda_0 x - iS(\lambda_0)z} + [e_H(k_0) \{1 + A_0^H(\lambda_0)\} \\ &\quad + e_V(k_0) A_0^V(\lambda_0)] e^{i\lambda_0 x + iS(\lambda_0)z} \quad \text{TE 入射} \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} &= e_V(k'_0) e^{i\lambda_0 x - iS(\lambda_0)z} + [e_H(k_0) A_0^H(\lambda_0) \\ &\quad + e_V(k_0) \{1 + A_0^V(\lambda_0)\}] e^{i\lambda_0 x + iS(\lambda_0)z} \quad \text{TM 入射} \end{aligned} \quad (2.83)$$

となる。

## インコヒーレント散乱

確率波動場の平均部分を除いたものをインコヒーレント波と呼ぶ。インコヒーレント散乱角度分布  $P(\theta | \theta_0)$  を、入射角  $\theta_0 = (\theta_0, \phi_0)$  に対して、単位表面積あたり角度  $\theta = (\theta, \phi)$  方向の単位立体角に散乱するインコヒーレント電力流により定義する。全インコヒーレント電力流は

$$P_{ic} = \int_{2\pi} P(\theta | \theta_0) d\theta \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \cdots \int_{|\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n|^2 < k^2} S(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \\ &\quad \times \left\{ |A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 + |A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 \right\} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \end{aligned} \quad (2.85)$$

と表現できるので、 $d\theta = \sin \theta d\theta d\phi$  より

$$\begin{aligned} P(\theta | \theta_0) &= k^2 \cos^2 \theta \left[ |A_1^H(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 + |A_1^V(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \right. \\ &\quad + 2! \int_{R_2} |A_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 \\ &\quad \left. + 2! \int_{R_2} |A_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 \cdots \right] \end{aligned} \quad (2.86)$$

が得られる。さらに、散乱波の偏波成分ごとに

$$P(\theta | \theta_0) \equiv P^H(\theta | \theta_0) + P^V(\theta | \theta_0) \quad (2.87)$$

$$P^H(\theta | \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^H(\theta | \theta_0) \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} &= k^2 \cos^2 \theta \left[ |A_1^H(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2! \int_{R_2} |A_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \cdots \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} &= k^4 \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 \left[ |a_1^H(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2! \int_{R_2} |a_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \cdots \right] \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$P^V(\theta | \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^V(\theta | \theta_0) \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned}
&= k^2 \cos^2 \theta |A_1^V(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \\
&\quad + 2! \int_{R_2} |A_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \dots
\end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned}
&= k^4 \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 |a_1^V(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \\
&\quad + 2! \int_{R_2} |a_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \dots
\end{aligned} \tag{2.93}$$

と表現できる。ここで、 $P^H(\theta|\theta_0)$ ,  $P^V(\theta|\theta_0)$  はそれぞれ、散乱波の TE 成分、TM 成分であり、 $P_n^H(\theta|\theta_0)$ ,  $P_n^V(\theta|\theta_0)$  はそれぞれ、 $n$  次 Wiener 核による散乱波の TE 成分、TM 成分を表す。一方、入射波の偏波成分ごとに表現すると

$$P^{\text{TE}}(\theta|\theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{\text{TE}}(\theta|\theta_0) \tag{2.94}$$

$$P^{\text{TM}}(\theta|\theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{\text{TM}}(\theta|\theta_0) \tag{2.95}$$

$$P_n^{\text{TE}}(\theta|\theta_0) = P_n^{\text{HH}}(\theta|\theta_0) + P_n^{\text{VH}}(\theta|\theta_0) \tag{2.96}$$

$$P_n^{\text{TM}}(\theta|\theta_0) = P_n^{\text{HV}}(\theta|\theta_0) + P_n^{\text{VV}}(\theta|\theta_0) \tag{2.97}$$

となる。ここで、 $P^{\text{TE}}$  は TE 偏波入射による散乱波を、 $P^{\text{TM}}$  は TM 偏波入射による散乱波を表す。 $P_n^{\nu}$ ,  $\nu = \text{HH}, \text{HV}, \text{VH}, \text{VV}$  は

$$P_1^{\nu}(\theta|\theta_0) = k^2 \cos^2 \theta |A_1^{\nu}(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \tag{2.98}$$

$$P_2^{\nu}(\theta|\theta_0) = 2! k^2 \cos^2 \theta \int_{R_2} |A_2^{\nu}(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 \tag{2.99}$$

⋮

である。また、Wiener 核における相反定理 (2.71)-(2.76) より

$$P_n^{\text{HH}}(\theta|\theta_0) = P_n^{\text{HH}}(\theta_0|\theta) \tag{2.100}$$

$$P_n^{\text{VV}}(\theta|\theta_0) = P_n^{\text{VV}}(\theta_0|\theta) \tag{2.101}$$

$$P_n^{\text{VH}}(\theta|\theta_0) = P_n^{\text{HV}}(\theta_0|\theta) \tag{2.102}$$

が得られる。

光散乱などの場合では散乱波動場そのものを測定することは困難である。光センサーなどを用いて散乱分布を測定するとインコヒーレント電力分布が得られる。(2.86) はインコヒーレント電力の平均値を表しており、一回の測定では平均値と同程度の大きさの揺らぎをもった値が得られる (付録 C 参照)。

## 表面電流

散乱波の表面波部分は (2.55) の積分の  $|\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n|^2 > k^2$  の領域から生じる。高さ  $z$  での表面に沿う電流  $P_{sf}$  は

$$P_{sf} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \dots \int_{|\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n|^2 > k^2} (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \\ \times \left\{ |A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 + |A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 \right\} \\ \times e^{-2z(|\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n|^2 - k^2)^{1/2}} d\lambda_1 \dots d\lambda_n \quad (2.103)$$

で与えられる。特に一様等方スペクトルの場合、平均電流は  $\lambda_0$  と同じ方向であることが示される。よって、全表面電流  $P_{sf}$  は  $P_{sf} \cdot \lambda_0 / \lambda_0$  を  $0 < z < \infty$  にわたり積分すると得られる。

$$P_{sf} = \int_{|\lambda_0 + \lambda_1|^2 > k^2} \frac{(\lambda_0 + \lambda_1) \cdot \lambda_0}{2k\lambda_0} \frac{|A_1^H(\lambda_1 | \lambda_0)|^2 + |A_1^V(\lambda_1 | \lambda_0)|^2}{(|\lambda_0 + \lambda_1|^2 - k^2)^{1/2}} d\lambda_1 + \dots \quad (2.104)$$

## 2.2 近似解法

2.1.6節で得た解 (2.61), (2.63) はマクスウェル方程式より得られる波動方程式 (2.45), (2.46) を満たす指数関数部分、偏波成分をもつ。したがって、境界条件 (2.47) を満たすように Wiener 核を決定すれば、問題は解けたことになる。Wiener 積分は次数ごとに直交しているので、境界条件式は各次数ごとに階層的に成り立つ。この章では不規則表面の粗さが小さいとして近似的な境界条件を考え、それをもとに Wiener 積分の各次数ごとの境界条件式を導き、 $A_n^H, A_n^V$  を求める。

## 2.2.1 等価境界条件

境界条件式 (2.47), (2.48) は不規則表面上で成り立つ式であるので取り扱いが困難である。そこで以下に示す等価境界条件を導入する。電界  $E$  を  $xy$  平面成分と  $z$  成分に分ける。

$$E = E_{xy} + E_z e_z \quad (2.105)$$

これを (2.47) に代入すると

$$\nabla f \times E_{xy} - e_z \times E_{xy} + E_z \nabla \times e_z = 0 \quad (2.106)$$

となる。さらに (2.106) を  $xy$  平面に含まれる成分と垂直な成分に分ける。

$$\nabla f \times E_{xy} = 0 \quad (xy \text{ 平面に垂直な成分}) \quad (2.107)$$

$$-e_z \times E_{xy} + E_z \nabla f \times e_z = 0 \quad (xy \text{ 平面内の成分}) \quad (2.108)$$

(2.108) において  $e_z \neq 0$  かつ  $e_z \perp E_{xy}, e_z \perp E_z \nabla f$  であることより

$$E_{xy} + E_z \nabla f = 0 \quad (2.109)$$

が得られるがこれは(2.107)も満たしていることがわかる。つまり(2.47)と(2.109)は同値である。不規則表面の粗さが十分小さく、かつ滑らか、すなわち  $k^2 \langle f^2 \rangle, |\nabla f|^2 \ll 1$  となる場合を考えて(2.109)を  $z=0$  の近傍で展開し、 $f$  の1次までで近似すると  $xy$  平面上での境界条件

$$E_{xy}(\mathbf{x}, 0) + f(\mathbf{T}^x \omega) \frac{\partial}{\partial z} E_{xy}(\mathbf{x}, 0) + \nabla f(\mathbf{T}^x \omega) E_z(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (2.110)$$

が得られる。これを等価境界条件と呼び、これを満たす解を求めることにする。

### 2.2.2 階層方程式

等価境界条件を Wiener 積分の次数ごとに解けば Wiener 核  $A_n^H, A_n^V$  が得られるが、確率波動場、不規則表面は一樣確率場であるから、1点  $\mathbf{x}=0$  で解ければ十分である。これは確率論的 Floquet の定理による解の一つの利点である。(2.17), (2.52) - (2.55) を(2.110)に代入し、多変数 Hermite 多項式の漸化式

$$\begin{aligned} dB(\lambda) \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] &= \hat{h}_{n+1}[dB(\lambda), dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \\ &+ \sum_{k=1}^n \hat{h}_{n-1}[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_{k-1}), dB(\lambda_{k+1}), \dots, dB(\lambda_n)] \\ &\times \delta(\lambda + \lambda_k) d\lambda d\lambda_k \end{aligned} \quad (2.111)$$

を用いて、 $f$  と  $U_n$  の積を  $n+1, n-1$  重 Wiener 積分に分解すれば、 $\hat{h}_n$  の直交性(2.58)によって、次数ごとの Wiener 核の階層的な関数方程式が得られる。これを階層方程式と呼ぶ。TE 偏波入射の場合の階層方程式の低次のものを示すと

$$\begin{aligned} (n=0) \\ e_H[\lambda_0] A_0^H(\lambda_0) + e_{Vxy}[\lambda_0] A_0^V(\lambda_0) \\ + i \int \overline{F(\lambda_1)} S(\lambda_0 + \lambda_1) \{ e_H[\lambda_0 + \lambda_1] A_1^H(\lambda_1 | \lambda_0) + e_{Vxy}[\lambda_0 + \lambda_1] A_1^V(\lambda_1 | \lambda_0) \} d\lambda_1 \\ - i \int \lambda_1 \overline{F(\lambda_1)} e_{Vz}[\lambda_0 + \lambda_1] \cdot e_z A_1^V(\lambda_1 | \lambda_0) d\lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} (n=1) \\ e_H[\lambda_0 + \lambda_1] A_1^H(\lambda_1 | \lambda_0) + e_{Vxy}[\lambda_0 + \lambda_1] A_1^V(\lambda_1 | \lambda_0) \\ + i S(\lambda_0) F(\lambda_1) \{ e_H[\lambda_0] (2 + A_0^H(\lambda_0)) + e_{Vxy}[\lambda_0] A_0^V(\lambda_0) \} \\ + 2i \int \overline{F(\lambda_2)} S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \{ e_H[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] A_2^H(\lambda_1, \lambda_2 | \lambda_0) \\ + e_{Vxy}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] A_2^V(\lambda_1, \lambda_2 | \lambda_0) \} d\lambda_2 \\ + i \lambda_1 F(\lambda_1) e_{Vz}[\lambda_0] \cdot e_z A_0^V(\lambda_0) \\ - 2i \int \lambda_2 \overline{F(\lambda_2)} e_{Vz}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] \cdot e_z A_2^V(\lambda_1, \lambda_2 | \lambda_0) d\lambda_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} (n=2) \\ e_H[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] A_2^H(\lambda_1, \lambda_2 | \lambda_0) + e_{Vxy}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] A_2^V(\lambda_1, \lambda_2 | \lambda_0) \\ + \frac{i}{2} S(\lambda_0 + \lambda_1) F(\lambda_2) \{ e_H[\lambda_0 + \lambda_1] A_1^H(\lambda_1 | \lambda_0) + e_{Vxy}[\lambda_0 + \lambda_1] A_1^V(\lambda_1 | \lambda_0) \} \\ + \frac{i}{2} S(\lambda_0 + \lambda_2) F(\lambda_1) \{ e_H[\lambda_0 + \lambda_2] A_1^H(\lambda_2 | \lambda_0) + e_{Vxy}[\lambda_0 + \lambda_2] A_1^V(\lambda_2 | \lambda_0) \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +3i \int \overline{F(\lambda_3)} S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \{e_H[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] A_2^H(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) \\
& \quad + e_{V_{xy}}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] A_3^V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0)\} d\lambda_3 \\
& + \frac{i}{2} \lambda_2 F(\lambda_2) e_{V_z}[\lambda_0 + \lambda_1] \cdot e_z A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) + \frac{i}{2} \lambda_1 F(\lambda_1) e_{V_z}[\lambda_0 + \lambda_2] \cdot e_z A_1^V(\lambda_2|\lambda_0) \\
& - 3i \int \lambda_3 \overline{F(\lambda_3)} e_{V_z}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] \cdot e_z A_3^V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) d\lambda_3 = 0 \quad (2.114)
\end{aligned}$$

(n = 3)

$$\begin{aligned}
& e_H[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] A_3^H(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) + e_{V_{xy}}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] A_2^V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) \\
& + \frac{i}{3} S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) F(\lambda_3) \{e_H[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] A_2^H(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\
& \quad + e_{V_{xy}}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] A_2^V(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0)\} \\
& + \frac{i}{3} S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3) F(\lambda_2) \{e_H[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3] A_2^H(\lambda_1, \lambda_3|\lambda_0) \\
& \quad + e_{V_{xy}}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3] A_2^V(\lambda_1, \lambda_3|\lambda_0)\} \\
& + \frac{i}{3} S(\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3) F(\lambda_1) \{e_H[\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3] A_2^H(\lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) \\
& \quad + e_{V_{xy}}[\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3] A_2^V(\lambda_2, \lambda_3|\lambda_0)\} \\
& + 4i \int \overline{F(\lambda_4)} S(\lambda_0 + \dots + \lambda_4) \{e_H[\lambda_0 + \dots + \lambda_4] A_4^H(\lambda_1, \dots, \lambda_4|\lambda_0) \\
& \quad + e_{V_{xy}}[\lambda_0 + \dots + \lambda_4] A_4^V(\lambda_1, \dots, \lambda_4|\lambda_0)\} d\lambda_4 \\
& + \frac{i}{3} \lambda_2 F(\lambda_2) e_{V_z}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] \cdot e_z A_2^V(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\
& + \frac{i}{3} \lambda_2 F(\lambda_2) e_{V_z}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3] \cdot e_z A_2^V(\lambda_1, \lambda_3|\lambda_0) \\
& + \frac{i}{3} \lambda_1 F(\lambda_1) e_{V_z}[\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3] \cdot e_z A_2^V(\lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) \\
& - 4i \int \lambda_4 \overline{F(\lambda_4)} e_{V_z}[\lambda_0 + \dots + \lambda_4] \cdot e_z A_4^V(\lambda_1, \dots, \lambda_4|\lambda_0) d\lambda_4 = 0 \quad (2.115)
\end{aligned}$$

となる。TM 偏波入射の場合の階層方程式はTE 偏波入射の場合と比べて1次の方程式のみが異なっている

(n = 1)

$$\begin{aligned}
& e_H[\lambda_0 + \lambda_1] A_1^H(\lambda_1|\lambda_0) + e_{V_{xy}}[\lambda_0 + \lambda_1] A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) \\
& + iS(\lambda_0) F(\lambda_1) \{e_H[\lambda_0] A_0^H(\lambda_0) + e_{V_{xy}}[\lambda_0] (2 + A_0^V(\lambda_0))\} \\
& + 2i \int \overline{F(\lambda_2)} S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \{e_H[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] A_2^H(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\
& \quad + e_{V_{xy}}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] A_2^V(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0)\} d\lambda_2 \\
& + i\lambda_1 F(\lambda_1) e_{V_z}[\lambda_0] \cdot e_z (2 + A_0^V(\lambda_0)) \\
& - 2i \int \lambda_2 \overline{F(\lambda_2)} e_{V_z}[\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2] \cdot e_z A_2^V(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) d\lambda_2 = 0 \quad (2.116)
\end{aligned}$$

となる。

### 2.2.3 近似解

不規則表面の粗さ、すなわち分散が $\sigma^2$ のオーダーであるとするとき  $F(\lambda)$  は $\sigma^1$ のオーダーとなる。 $F(\lambda)$  の大きさをもとにして前節の階層方程式でオーダーの評価をおこなうと、 $A_0^H, A_0^V$  は $\sigma^2$ 、

$A_n^H, A_n^V (n \geq 1)$  は少なくとも  $\sigma^n$  のオーダーであることがわかる。不規則表面の粗さが小さい場合を考えるので、 $\sigma$  に関して高次の項を無視することによって階層方程式を低次のものから近似的に解くことができる。解法は複雑になるので詳細は省略するが、2.4節でベクトル Wiener 核を用いた場合の解法を示すので参照されたい。

### コヒーレント波

コヒーレント波部分  $A_0^H, A_0^V$  は 0 次と 1 次の階層方程式 (2.112), (2.113), (2.116) より得られる。TE 偏波入射の場合は

$$A_0^H(\lambda_0) = -2 \frac{S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)}{1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)} \equiv -2 \frac{Z_{sh}(\lambda_0)}{1 + Z_{sh}(\lambda_0)} \quad (2.117)$$

$$A_0^V(\lambda_0) = 0 \quad (2.118)$$

$$Z_{sh}(\lambda_0) \equiv S(\lambda_0)\xi(\lambda_0) \quad (2.119)$$

$$\xi(\lambda_0) = \int |F(\lambda_1)|^2 \left[ S(\lambda_0 + \lambda_1) + \frac{|\lambda_1|^2 \sin^2 \phi_{0,1}}{S(\lambda_0 + \lambda_1)} \right] d\lambda_1 \quad (2.120)$$

となり、TM 偏波入射の場合

$$A_0^H(\lambda_0) = 0 \quad (2.121)$$

$$A_0^V(\lambda_0) = -2 \frac{\eta(\lambda_0)}{S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)} \equiv -2 \frac{Z_{sv}(\lambda_0)}{1 + Z_{sv}(\lambda_0)} \quad (2.122)$$

$$Z_{sv}(\lambda_0) \equiv \frac{\eta(\lambda_0)}{S(\lambda_0)} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} \eta(\lambda_0) = & S^2(\lambda_0) \int |F(\lambda_1)|^2 S(\lambda_0 + \lambda_1) d\lambda_1 \\ & + k^2 \int |F(\lambda_1)|^2 \frac{|\lambda_1|^2 \cos^2 \phi_{0,1}}{S(\lambda_0 + \lambda_1)} d\lambda_1 \end{aligned} \quad (2.124)$$

となる。ただし、ここで  $\phi_{0,1}$  は  $\lambda_0$  と  $\lambda_1$  のなす角を表す。また、コヒーレント波部分では交差偏波は起こらないことがわかる。

### インコヒーレント波

インコヒーレント波部分  $A_1^H, A_2^H, \dots, A_1^V, A_2^V, \dots$  はより高次の階層方程式 (2.114), (2.115) より得られる。TE 偏波入射、TM 偏波入射それぞれの場合の結果を以下に示す。

#### TE 偏波入射

$$A_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = \frac{-2iF(\lambda_1)S(\lambda_0)e_H[\lambda_0 + \lambda_1] \cdot e_H[\lambda_0]}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1)\xi(\lambda_0 + \lambda_1)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \quad (2.125)$$

$$= \frac{-2iF(\lambda_1)S(\lambda_0)\cos\phi_{0,1}}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1)\xi(\lambda_0 + \lambda_1)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \quad (2.126)$$

$$A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = \frac{2ikF(\lambda_1)S(\lambda_0)e_z \cdot [\lambda_0 \times (\lambda_0 + \lambda_1)]}{[S(\lambda_0 + \lambda_1) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)][\lambda_0\|\lambda_0 + \lambda_1]} \quad (2.127)$$

$$= \frac{2ikF(\lambda_1)S(\lambda_0)\sin\phi_{0,0+1}}{[S(\lambda_0 + \lambda_1) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} A_2^H(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) &= -\frac{F(\lambda_2)F(\lambda_1)S(\lambda_0 + \lambda_1)S(\lambda_0)\cos\phi_{0+1,0+1+2}\cos\phi_{0,0+1}}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0 + \lambda_1)\xi(\lambda_0 + \lambda_1)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \\ &\quad -\frac{F(\lambda_1)F(\lambda_2)S(\lambda_0 + \lambda_2)S(\lambda_0)\cos\phi_{0+2,0+1+2}\cos\phi_{0,0+2}}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \\ &\quad +\frac{k^2F(\lambda_2)F(\lambda_1)S(\lambda_0)\sin\phi_{0+1,0+1+2}\sin\phi_{0,0+1}}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][S(\lambda_0 + \lambda_1) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \\ &\quad +\frac{k^2F(\lambda_1)F(\lambda_2)S(\lambda_0)\sin\phi_{0+2,0+1+2}\sin\phi_{0,0+2}}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][S(\lambda_0 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} A_2^V(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) &= \frac{kF(\lambda_2)F(\lambda_1)S(\lambda_0 + \lambda_1)S(\lambda_0)\sin\phi_{0+1,0+1+2}\cos\phi_{0,0+1}}{[S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0 + \lambda_1)\xi(\lambda_0 + \lambda_1)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \\ &\quad +\frac{kF(\lambda_1)F(\lambda_2)S(\lambda_0 + \lambda_2)S(\lambda_0)\sin\phi_{0+2,0+1+2}\cos\phi_{0,0+2}}{[S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \\ &\quad +\frac{F(\lambda_2)F(\lambda_1)[k^2\cos\phi_{0+1,0+1+2} - |\lambda_0 + \lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2][S(\lambda_0)k\sin\phi_{0,0+1}]}{[S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][S(\lambda_0 + \lambda_1) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \\ &\quad +\frac{F(\lambda_1)F(\lambda_2)[k^2\cos\phi_{0+2,0+1+2} - |\lambda_0 + \lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2][S(\lambda_0)k\sin\phi_{0,0+2}]}{[S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][S(\lambda_0 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0)\xi(\lambda_0)]} \end{aligned} \quad (2.130)$$

## TM 偏波入射

$$A_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = \frac{-2ikF(\lambda_1)S(\lambda_0)\sin\phi_{0,0+1}}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1)\xi(\lambda_0 + \lambda_1)][S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]} \quad (2.131)$$

$$A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = \frac{-2iF(\lambda_1)S(\lambda_0)[k^2\cos\phi_{0,0+1} - |\lambda_0\|\lambda_0 + \lambda_1|]}{[S(\lambda_0 + \lambda_1) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1)][S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]} \quad (2.132)$$

$$(2.133)$$

$$\begin{aligned} A_2^H(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) &= -\frac{kF(\lambda_2)F(\lambda_1)S(\lambda_0 + \lambda_1)S(\lambda_0)\cos\phi_{0+1,0+1+2}\sin\phi_{0,0+1}}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0 + \lambda_1)\xi(\lambda_0 + \lambda_1)][S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]} \\ &\quad -\frac{kF(\lambda_1)F(\lambda_2)S(\lambda_0 + \lambda_2)S(\lambda_0)\cos\phi_{0+2,0+1+2}\sin\phi_{0,0+2}}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][1 + S(\lambda_0 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_2)][S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]} \\ &\quad -\frac{kF(\lambda_2)F(\lambda_1)S(\lambda_0 + \lambda_1)S(\lambda_0)\sin\phi_{0+1,0+1+2}[k^2\cos\phi_{0,0+1} - |\lambda_0\|\lambda_0 + \lambda_1|]}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][S(\lambda_0 + \lambda_1) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1)][S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]} \\ &\quad -\frac{kF(\lambda_1)F(\lambda_2)S(\lambda_0 + \lambda_2)S(\lambda_0)\sin\phi_{0+2,0+1+2}[k^2\cos\phi_{0,0+2} - |\lambda_0\|\lambda_0 + \lambda_2|]}{[1 + S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)][S(\lambda_0 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_2)][S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]} \end{aligned}$$

(2.134)

$$\begin{aligned}
& A_2^V(\lambda_1, \lambda_2 | \lambda_0) \\
&= \frac{k^2 F(\lambda_2) F(\lambda_1) S(\lambda_0 + \lambda_1) S(\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} \sin \phi_{0,0+1}}{[S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)] [1 + S(\lambda_0 + \lambda_1) \xi(\lambda_0 + \lambda_1) [S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]]} \\
&+ \frac{k^2 F(\lambda_1) F(\lambda_2) S(\lambda_0 + \lambda_2) S(\lambda_0) \sin \phi_{0+2,0+1+2} \sin \phi_{0,0+2}}{[S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)] [1 + S(\lambda_0 + \lambda_2) \xi(\lambda_0 + \lambda_2) [S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]]} \\
&- \frac{F(\lambda_2) F(\lambda_1) [k^2 \cos \phi_{0+1,0+1+2} - |\lambda_0 + \lambda_1| |\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2|]}{[S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)] [S(\lambda_0 + \lambda_1) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1)]} \\
&\quad \times \frac{[k^2 \cos \phi_{0,0+1} - |\lambda_0| |\lambda_0 + \lambda_1| S(\lambda_0)]}{[S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]} \\
&- \frac{F(\lambda_1) F(\lambda_2) [k^2 \cos \phi_{0+2,0+1+2} - |\lambda_0 + \lambda_2| |\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2|]}{[S(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)] [S(\lambda_0 + \lambda_2) + \eta(\lambda_0 + \lambda_2)]} \\
&\quad \times \frac{[k^2 \cos \phi_{0,0+2} - |\lambda_0| |\lambda_0 + \lambda_2| S(\lambda_0)]}{[S(\lambda_0) + \eta(\lambda_0)]} \quad (2.135)
\end{aligned}$$

ただし、ここで  $\phi_{0+1,0+1+2}$  は  $\lambda_0 + \lambda_1$  と  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$  のなす角を表す。なお、ここに示した解が相反定理 (2.71) - (2.76) を満たすことは容易に確認できる。

#### インコヒーレント波—散乱因子表現—

インコヒーレント波部分はコヒーレント波部分が散乱を受けた結果生じたものであるという表現が可能であり、この表現を散乱因子表現と呼ぶ。散乱因子表現を用いると高次の Wiener 核を見通しよく表現でき、数値計算にも便利な形が得られる。

まず、Wiener 核の表現を以下のように変更する。

$$A_1^H(\lambda - \lambda_0) \equiv A_1^H(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0) \quad (2.136)$$

$$A_1^V(\lambda - \lambda_0) \equiv A_1^V(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0) \quad (2.137)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$$

$$A_2^H(\lambda - \lambda_1, \lambda'_1 - \lambda_0) \equiv A_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0) \quad (2.138)$$

$$A_2^V(\lambda - \lambda_1, \lambda'_1 - \lambda_0) \equiv A_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0) \quad (2.139)$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_1 = \lambda - \lambda_2 \quad (2.140)$$

$$\lambda'_1 = \lambda_0 + \lambda_2 = \lambda - \lambda_1 = \lambda_0 + \lambda - \lambda_1 \quad (2.141)$$

ここで  $\lambda_1 - \lambda_0$  は波数  $\lambda_0$  で入射した波動が散乱されて波数が  $\lambda_1$  に変化することを表す。 $\lambda - \lambda_1, \lambda'_1 - \lambda_0$  は 2 つの中間状態  $\lambda_1, \lambda'_1$  を経由する散乱を表す。また、0 次の Wiener 核に主波部分を加えたもの、すなわちコヒーレント波部分を表す Wiener 核を

$$A^H(\lambda_0) = \begin{cases} 2 + A_0^H(\lambda_0) & (\text{TE 入射}) \\ 0 & (\text{TM 入射}) \end{cases} \quad (2.142)$$

$$A^V(\lambda_0) = \begin{cases} 0 & (\text{TE 入射}) \\ 2 + A_0^V(\lambda_0) & (\text{TM 入射}) \end{cases} \quad (2.143)$$

とおく。次に、散乱因子を以下のように定義する。

$$D(\lambda_2 \leftarrow \lambda_1) = \begin{bmatrix} D_{HH} & D_{HV} \\ D_{VH} & D_{VV} \end{bmatrix}_{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.144)$$

$$D_{HH}(\lambda_2 \leftarrow \lambda_1) = -i \frac{S(\lambda_1)F(\lambda_2 - \lambda_1)}{1 + S(\lambda_2)\xi(\lambda_2)} \cos \phi_{1,2}, \quad (\text{TE} \rightarrow \text{TE}) \quad (2.145)$$

$$D_{HV}(\lambda_2 \leftarrow \lambda_1) = -i \frac{kF(\lambda_2 - \lambda_1)}{1 + S(\lambda_2)\xi(\lambda_2)} \sin \phi_{1,2}, \quad (\text{TE} \rightarrow \text{TM}) \quad (2.146)$$

$$D_{VH}(\lambda_2 \leftarrow \lambda_1) = i \frac{kS(\lambda_1)F(\lambda_2 - \lambda_1)}{S(\lambda_2) + \eta(\lambda_2)} \sin \phi_{1,2}, \quad (\text{TM} \rightarrow \text{TE}) \quad (2.147)$$

$$D_{VV}(\lambda_2 \leftarrow \lambda_1) = -i \frac{F(\lambda_2 - \lambda_1)}{S(\lambda_2) + \eta(\lambda_2)} [k^2 \cos \phi_{1,2} - |\lambda_1||\lambda_2|], \quad (\text{TM} \rightarrow \text{TM}) \quad (2.148)$$

ここで、 $D_{HH}$ はTE波からTE波、 $D_{HV}$ はTM波からTE波、 $D_{VH}$ はTE波からTM波、また、 $D_{VV}$ はTM波からTM波への散乱振幅を表している。

また、スカラー波場合の散乱因子 [60] は

$$\text{ディリクレ条件: TE} \rightarrow \text{TE} \text{ に対応: } -i \frac{S(\lambda_1)F(\lambda_2 - \lambda_1)}{1 + S(\lambda_2)\xi(\lambda_2)} \quad (2.149)$$

$$\text{ノイマン条件: TM} \rightarrow \text{TM} \text{ に対応: } -i \frac{F(\lambda_2 - \lambda_1)}{S(\lambda_2) + \eta(\lambda_2)} [k^2 - \lambda_1 \cdot \lambda_2] \quad (2.150)$$

となり、TE波からTE波への散乱はディリクレ条件に、TM波からTM波への散乱はノイマン条件に対応がつく。しかし、この対応は入射波と散乱波の波動ベクトルが平行であるという1次元の場合にのみ有効である。したがって、不規則表面による電磁波散乱に関する議論をディリクレ条件とノイマン条件だけで進めると実際の現象を見落す可能性があるといえる。

散乱因子を用いて  $A_1^H, A_2^H, A_1^V, A_2^V$  を表現すると

$$\begin{bmatrix} A_1^H(\lambda - \lambda_0) \\ A_1^V(\lambda - \lambda_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{HH} & D_{HV} \\ D_{VH} & D_{VV} \end{bmatrix}_{\lambda - \lambda_0} \begin{bmatrix} A^H(\lambda_0) \\ A^V(\lambda_0) \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_2^H(\lambda - \lambda_r, \lambda'_r - \lambda_0) \\ A_2^V(\lambda - \lambda_r, \lambda'_r - \lambda_0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} D_{HH} & D_{HV} \\ D_{VH} & D_{VV} \end{bmatrix}_{\lambda - \lambda_r} \begin{bmatrix} A_1^H(\lambda_r - \lambda_0) \\ A_1^V(\lambda_r - \lambda_0) \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \begin{bmatrix} D_{HH} & D_{HV} \\ D_{VH} & D_{VV} \end{bmatrix}_{\lambda - \lambda'_r} \begin{bmatrix} A_1^H(\lambda'_r - \lambda_0) \\ A_1^V(\lambda'_r - \lambda_0) \end{bmatrix} \right\} \quad (2.152) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} D_{HH} & D_{HV} \\ D_{VH} & D_{VV} \end{bmatrix}_{\lambda - \lambda_r} \begin{bmatrix} D_{HH} & D_{HV} \\ D_{VH} & D_{VV} \end{bmatrix}_{\lambda_r - \lambda_0} \begin{bmatrix} A^H(\lambda_0) \\ A^V(\lambda_0) \end{bmatrix} \right. \end{aligned}$$

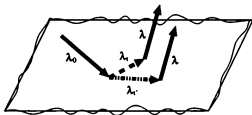


図 2.3: 2 次 Wiener 核による散乱過程

$$+ \left[ \begin{array}{cc} D_{HH} & D_{HV} \\ D_{VH} & D_{VV} \end{array} \right]_{\lambda_1 - \lambda_1'} \left[ \begin{array}{cc} D_{HH} & D_{HV} \\ D_{VH} & D_{VV} \end{array} \right]_{\lambda_1' - \lambda_0} \left[ \begin{array}{c} A^H(\lambda_0) \\ A^V(\lambda_0) \end{array} \right] \quad (2.153)$$

となる。散乱因子表現では入射波の偏波が異なっても解の形は不変で、コヒーレント波部分  $A^H, A^V$  が変化するだけである。また、任意の偏波での入射の場合でもコヒーレント波部分  $A^H, A^V$  を適当に選べば表現できる。

各項を物理的に解釈することも可能である。 $A_1^H$  は TE 波が  $D_{HH}$  によって TE 波に散乱されたものと TM 波が  $D_{HV}$  によって TE 波に散乱されたものからなることがわかる。 $A_1^V$  も同様である。 $A_2^H, A_2^V$  は 2 回の散乱を含んでいて、2 つの中間状態  $\lambda_1, \lambda_1'$  を経たのちの  $\lambda_2$  への散乱からなる (図 2.3 参照)。このように中間状態が対になるのは Wiener 核がパラメータに関する対称性をもつからである。

### 散乱因子の物理的意味

各散乱因子の分母に含まれる関数  $\zeta, \eta$  を無視すると通常の振動論で得られる解と同様なものとなり、これらは 1 回の散乱を表す。この場合  $D_{VH}$  と  $D_{VV}$  が  $S(\lambda_2) = 0$  のときに発散することがわかる。これが通常の振動論が不規則導体表面による電磁波散乱を扱うのには適さない理由である。この発散は電磁波が表面に沿って伝搬するモード (自由伝搬モード) が存在するために起こるものである [16]。表面に沿った電磁波は不規則表面と相互作用をつづけながら伝搬するので多重散乱の効果を考慮せずに扱うのは困難である。散乱因子には  $\zeta, \eta$  が含まれているがこれらが無限回散乱の効果を表している。散乱因子が多重散乱の効果を含むのは表面との相互作用を表す関数  $\zeta, \eta$  が分母に和の形で入っているからであるが、無限回散乱を繰り返すことについては次章で詳しく述べることにする。また、一つの散乱因子が表す散乱のことを“衣を着た散乱”と呼ぶ。

偏波の変化をおこさない散乱因子  $D_{HH}, D_{VV}$  には  $\cos \phi_{1,2}$  が、偏波の変化をおこす散乱因子  $D_{VH}, D_{HV}$  には  $\sin \phi_{1,2}$  が含まれるが、これは波動ベクトルと電界の  $x_y$  平面成分  $E_{xy}$  との幾何学的

関係を考えることによって理解できる。TE 偏波入射の場合、電界  $E_{xy}$  は入射波動ベクトル  $\lambda_1$  の直交成分のみからなるが、散乱波動ベクトル  $\lambda_2$  からみると直交成分と平行成分の合成となり、直交成分は  $\cos \phi_{1,2}$  に、平行成分は  $\sin \phi_{1,2}$  に比例する。ここで、直交成分は  $D_{HH}$  に、平行成分は  $D_{VV}$  に対応している。TM 偏波入射の場合も同様である。

## 2.3 インコヒーレント散乱分布

コヒーレント散乱や1次の Wiener 核  $A_1^H, A_1^V$  によるインコヒーレント散乱、表面電流流についてはすでに数値的な結果が与えられている [38]。また、スカラー波の場合では2次のインコヒーレント散乱の結果も得られていて、ノイマン条件で後方強調散乱が確認されている [60]。そこで今回は電磁波散乱での後方強調散乱を解析するべく、電磁波の場合での2次のインコヒーレント散乱を数値計算した。ここで1次散乱は1次の Wiener 核による散乱を、2次散乱は2次の Wiener 核による散乱を意味する。

相関距離  $kl = 1.0$ 、表面の粗さ  $\sigma = 0.3$ 、として TE 偏波入射、TM 偏波入射それぞれの場合のインコヒーレント散乱分布を Wiener 核の次数ごとに計算した。図 2.4 - 2.6 に入射面内 ( $\phi = 0^\circ$ ) への散乱分布を、図 2.7 - 2.9 に入射面外 ( $\phi = 45^\circ, 90^\circ$ ) への散乱分布を示した。また、不規則表面の相関距離  $kl = 1.5$  の場合を図 2.10 に、表面粗さ  $\sigma = 0.2$  の場合を図 2.11 に示した。

### 2.3.1 散乱因子

各散乱因子の大きさを図 2.12 に示した。相関距離  $kl = 1$ 、表面の粗さ  $\sigma = 0.3$  とした。横軸の単位は  $k$  である。 $D_{VV}$  と  $D_{VV}$  に  $\lambda = k$  付近にピークがみられ、表面に沿って伝搬する TM 偏波の電磁波が強く励起されることがわかるが、これは完全導体表面上の自由伝搬モードに対応するものである [38]。

### 2.3.2 1次散乱

1次散乱と2次散乱を比較すると2次散乱のほうがかなり小さな値であることがわかる<sup>4</sup>。これは1次の Wiener 核までの計算で光学定理をよく満たす [38] ということから予想できることである。つまり、散乱分布の概略を知るためには1次までの計算で十分であるといえる。また、入射面内への散乱 ( $\phi = 0^\circ, 180^\circ$ ) では交差偏波がみられない ( $P_1^{HV} = P_1^{VH} = 0$ ) こともわかる。さらに、TE 偏波散乱波と TM 偏波散乱波を比較すると  $\theta = 90^\circ$  付近で TE 散乱波が強いことがわかるが、これは完全導体表面上の自由伝搬モードによる異常散乱の効果である。

<sup>4</sup> グラフの縦軸のスケールに注意。

## 2.3.3 2次散乱—共偏波および交差偏波後方強調散乱—

2次散乱を考慮してはじめて見出される現象が二つある。一つは偏波の交差である。前節で述べたように1次散乱に交差偏波はみられないが、2次散乱には交差偏波がある( $\phi = 0^\circ$ で  $P_2^{IV} \neq 0$ ,  $P_2^{VH} \neq 0$ ) ことがわかる。もう一つは後方強調散乱である。2次散乱では入射方向へ戻っていく波が際だって強く、後方強調散乱が確認できる。また、後方強調散乱は共偏波成分( $P_2^{HH}$ ,  $P_2^{VV}$ )、交差偏波成分( $P_2^{HV}$ ,  $P_2^{VH}$ )の両方にみられる。

後方強調散乱は互いに時間反転の関係にある2つの散乱過程間の干渉によるものと解釈されているが[29, 32]、交差偏波後方強調散乱はそうのように解釈できない。ここでTE偏波入射の場合を例にとる。2次の共偏波後方散乱過程の一方(図2.13a)はTE偏波入射波が中間状態を経てTE偏波散乱波へと散乱される2回散乱過程を意味しており、その時間反転がもう一方の散乱過程(図2.13b)に対応している。交差偏波後方散乱過程の一方(図2.14a)はTE偏波入射波が中間状態を経てTM偏波へと散乱される2回散乱過程を意味しているが、この散乱過程の時間反転はTM偏波入射波が中間状態を経たTE偏波散乱であり、もう一方の散乱過程(図2.14b)とは一致しない。つまり、交差偏波後方強調散乱はこれらの散乱過程(図2.14a,b)の干渉によるものなので、時間反転散乱過程間の干渉とは解釈できない。散乱過程の経路は互いに時間反転であるが、偏波の状態が時間に対して対称でない。したがって、後方強調散乱は時間反転散乱過程同士の干渉であるとするよりも互いに時間反転の経路をもつ散乱過程同士の干渉であると解釈する方がより正確である。

2次のインコヒーレント散乱分布は入射方向 $\lambda_1$ と散乱方向 $\lambda_2$ を与えたのち、中間状態 $\lambda_i$ についての積分を行なうことによって得られるが、図2.12に示すように中間状態が表面に沿ったTM偏波散乱波、すなわち自由伝搬モードである部分の寄与が大きくなる。よって、TE偏波またはTM偏波入射波が1回目の散乱で自由伝搬モードに変化したものが、2回目の散乱でTE偏波またはTM偏波散乱波へと変化する散乱過程同士の干渉により後方強調散乱が生じると考えられる。



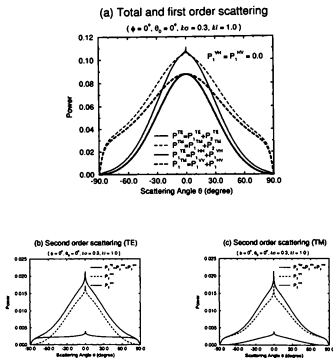


図 2.4: 入射面内 ( $\phi = 0^\circ$ ) におけるインコヒーレント散乱分布 (入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ ) (a) TE/TM 偏波入射時の全散乱分布 ( $P = P_1 + P_2$ ) と 1 次散乱分布 ( $P_1$ ) (b) TE 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ ) (c) TM 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ )

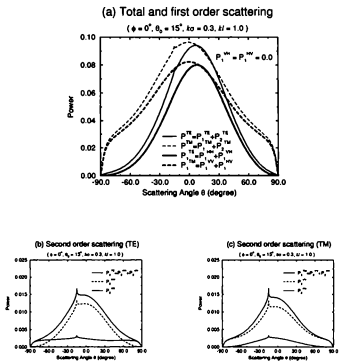


図 2.5: 入射面内 ( $\phi = 0^\circ$ ) におけるインコヒーレント散乱分布 (入射角  $\theta_0 = 15^\circ$ ) (a) TE, TM 偏波入射時の全散乱分布 ( $P = P_1 + P_2$ ) と 1 次散乱分布 ( $P_1$ ) (b) TE 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ ) (c) TM 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ )

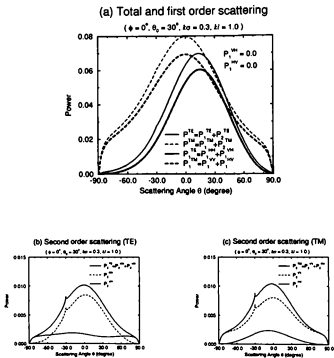


図 2.6: 入射面内 ( $\phi = 0^\circ$ ) におけるインコヒーレント散乱分布 (入射角  $\theta_0 = 30^\circ$ ) (a) TE, TM 偏波入射時の全散乱分布 ( $P = P_1 + P_2$ ) と 1 次散乱分布 ( $P_1$ ) (b) TE 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ ) (c) TM 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ )

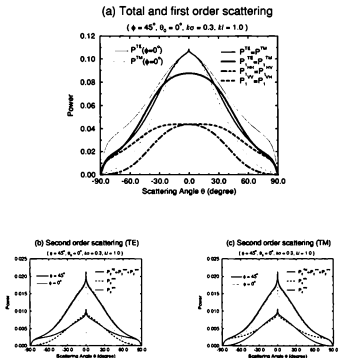


図 2.7: 入射面外 ( $\phi = 45^\circ$ ) におけるインコヒーレント散乱分布 (入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ ) (a) TE, TM 偏波入射時の全散乱分布 ( $P = P_1 + P_2$ ) と 1 次散乱分布 ( $P_1$ ) (b) TE 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ ) (c) TM 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ )

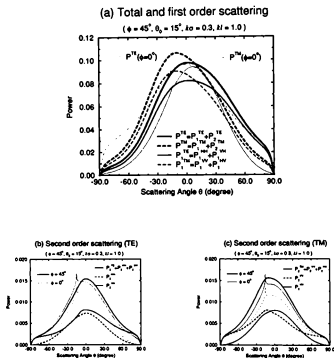


図 2.8: 入射面内 ( $\phi = 45^\circ$ ) におけるインコヒーレント散乱分布 (入射角  $\theta_0 = 15^\circ$ ) (a) TE, TM 偏波入射時の全散乱分布 ( $P = P_1 + P_2$ ) と 1 次散乱分布 ( $P_1$ ) (b) TE 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ ) (c) TM 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ )

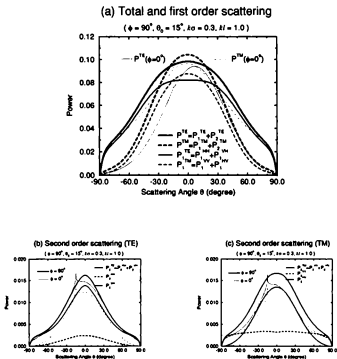


図 2.9: 入射面外 ( $\phi = 90^\circ$ ) におけるインコヒーレント散乱分布 (入射角  $\theta_0 = 15^\circ$ ) (a) TE, TM 偏波入射時の全散乱分布 ( $P = P_1 + P_2$ ) と 1 次散乱分布 ( $P_1$ ) (b) TE 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ ) (c) TM 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ )

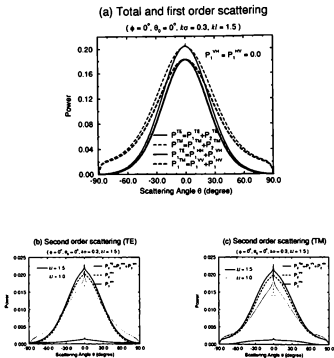


図 2.10: 不規則表面の相間距離が異なる場合  $kl = 1.5$  のインコヒーレント散乱分布 ( $\phi = 0^\circ, \theta_0 = 0^\circ$ )  
(a) TE, TM 偏波入射時の全散乱分布 ( $P = P_1 + P_2$ ) と 1 次散乱分布 ( $P_1$ ) (b) TE 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ ) (c) TM 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ )

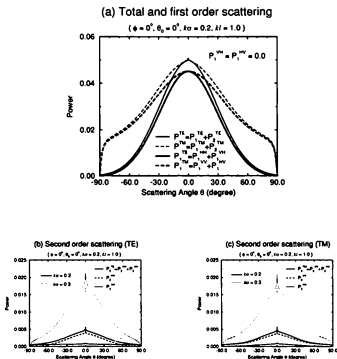


図 2.11: 不規則表面の表面粗さが異なる場合  $k\sigma = 0.2$  のインコヒーレント散乱分布 ( $\phi = 0^\circ, \theta_0 = 15^\circ$ ) (a) TE, TM 偏波入射時の全散乱分布 ( $P = P_1 + P_2$ ) と 1 次散乱分布 ( $P_1$ ) (b) TE 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ ) (c) TM 偏波入射時の 2 次散乱分布 ( $P_2$ )



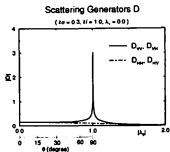


図 2.12: 散乱因子、入射波ベクトル  $\lambda_1 = 0$ 、方位角  $\phi_{1,2} = 0^\circ (D_{HH}, D_{VV})$ ;  $\phi_{1,2} = 90^\circ (D_{VH}, D_{HV})$

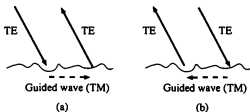


図 2.13: 共偏波後方強調散乱

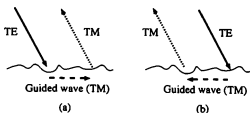


図 2.14: 交差偏波後方強調散乱

## 2.4 Wiener 核の構造

近似境界条件では電界が  $xy$  平面成分と  $z$  方向成分で表現されているが、一方、波動場では TE 偏波成分  $A_n^H$  と TM 偏波成分  $A_n^V$  に分解して表現されている。そこで波動場の電界も  $xy$  平面成分と  $z$  方向成分にわけて考えると階層方程式がより整理された形で表現できると期待できる。この章ではベクトル Wiener 核を導入し、階層方程式と Wiener 核の構造について議論する。

### 2.4.1 ベクトル Wiener 核による表現

波動場の電界の  $n$  次の Wiener 核による成分を  $xy$  平面成分  $A_n$  と  $z$  方向成分  $B_n$  で表現する。ここで、 $A_n, B_n$  を

$$A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \equiv e_{11}[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) + e_{Vxy}[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \quad (2.154)$$

$$B_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \equiv e_{Vz}[\lambda_0 + \dots + \lambda_n] A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \quad (2.155)$$

と定義し、ベクトル Wiener 核と呼ぶ。一方、TE・TM 偏波成分を表す Wiener 核  $A_n^H, A_n^V$  をスカラー Wiener 核と呼ぶこととする。また、 $B_n$  は以下のように  $A_n$  で表現できる。

$$-B_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \cdot e_z = A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \cdot \frac{\lambda_0 + \dots + \lambda_n}{S(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)} \quad (2.156)$$

よって、 $A_n$  のみですべての電界成分の表現が可能である。

### 2.4.2 階層方程式

前節で定義したベクトル Wiener 核を用いると階層方程式 (2.112) - (2.115), (2.116) は  $A_n$  に関する階層方程式に書き換えられる。まず、以下のように作用素を定義する。作用素は 2 行 2 列の行列である。

上昇作用素

$$P(\lambda_1 | \lambda_0) \equiv -iF(\lambda_1) \left\{ S(\lambda_0)I - \lambda_1 \frac{\lambda_0'}{S(\lambda_0)} \right\} \quad (2.157)$$

下降作用素

$$M(\lambda_1 | \lambda_0 + \lambda_1) \equiv P(-\lambda_1 | \lambda_0 + \lambda_1) \quad (2.158)$$

$$= -i\overline{F(\lambda_1)} \left\{ S(\lambda_0 + \lambda_1)I + \lambda_1 \frac{(\lambda_0 + \lambda_1)'}{S(\lambda_0 + \lambda_1)} \right\} \quad (2.159)$$

自己相互作用素

$$\Gamma(\lambda_0) \equiv \int M(\lambda_1 | \lambda_0 + \lambda_1) C(\lambda_0 + \lambda_1) P(\lambda_1 | \lambda_0) d\lambda_1 \quad (2.160)$$

くりこみ作用素

$$C(\lambda) \equiv [I - \Gamma(\lambda)]^{-1} \quad (2.161)$$

上昇作用素  $P(\lambda_1|\lambda_0)$  は波動ベクトルが  $\lambda_0$  である入射波に波動ベクトル  $\lambda_1$  を与えるような散乱を表し、作用を受けた Wiener 核の次数は 1 増える。一方、下降作用素  $M(\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1)$  は入射波  $\lambda_0 + \lambda_1$  から波動ベクトル  $\lambda_1$  を奪う散乱を表し、作用させた後に  $\lambda_1$  で積分すると Wiener 核の次数が 1 減る。つまり、上昇作用素は Wiener 核の次数を +1、下降作用素は -1 する 1 回散乱を表す。図 2.15 - 2.17 に上昇作用素と下降作用素のもつ内容を概念的に示した。図 2.15, 2.16 では右矢印が入射波と散乱波を、上下の矢印が表面による波動ベクトルの変化を表している。また、図 2.17 では水平線が Wiener 核の次数を表している。このように、1 回散乱を表す作用素が次数を 1 変化させるもののみであるのは等価境界条件を導く際にテーラー展開の 2 次以上の項を無視したことによる。自己相互作用素とくりこみ作用素は多重散乱の効果を表すもので、Wiener 核の次数を変化させない。これらは互いに関連しあった定義となっているが、その詳細は次節の解法の中で明らかにする。

次に、入射波ベクトルを以下のように定義する。

$$N(\lambda_0) \equiv 2e_H[\lambda_0] \quad \text{TE 入射} \quad (2.162)$$

$$\equiv 2e_{Vxy}[\lambda_0] \quad \text{TM 入射} \quad (2.163)$$

入射波ベクトルは 0 次の Wiener 核成分の一つで 2 次元の列ベクトルである。ここでは、TE 偏波入射と TM 偏波入射の場合を示したが、一般の偏波の場合はこれらの線形結合で表現できる。さらに、 $P, M, C$  の簡易表現を

$$P[\lambda_1] \underline{(\lambda_0)} \equiv P(\lambda_1|\lambda_0) \quad (2.164)$$

$$M[\lambda_1] \underline{(\lambda_0 + \lambda_1)} \equiv M(\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1) \quad (2.165)$$

$$C(\underline{\lambda}) \equiv C(\lambda) \quad (2.166)$$

とする。ここで  $\underline{(\lambda)}$  は  $\lambda$  の波動に関するベクトルに作用することを示す。 $P, M$  を用いて  $A_n$  に関する階層方程式を表現すると

$$\begin{aligned} (n=0) \\ A_0(\lambda_0) &= \int_{(n=1)} M[\lambda_1] A_1(\lambda_1|\lambda_0) d\lambda_1 \end{aligned} \quad (2.167)$$

$$\begin{aligned} (n=1) \\ A_1(\lambda_1|\lambda_0) &= P[\lambda_1] \{N(\lambda_0) + A_0(\lambda_0)\} + 2 \int M[\lambda_2] A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) d\lambda_2 \end{aligned} \quad (2.168)$$

$$\begin{aligned} (n=2) \\ A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) &= \frac{1}{2} P[\lambda_2] A_1(\lambda_1|\lambda_0) + \frac{1}{2} P[\lambda_1] A_1(\lambda_2|\lambda_0) \\ &\quad + 3 \int M[\lambda_3] A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) d\lambda_3 \end{aligned} \quad (2.169)$$

一般式 ( $n = 2, 3, \dots$ )

$$A_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}[\lambda_i] A_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ + (n+1) \int \mathcal{M}[\lambda_{n+1}] A_{n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} | \lambda_0) d\lambda_{n+1} \quad (2.170)$$

となる。これらの式から  $n$  次の Wiener 核は  $n-1$  次の Wiener 核に上昇作用素が作用したものと  $n+1$  次の Wiener 核に下降作用素が作用したものからなることがわかる。

### 2.4.3 積分方程式の 0 次近似

スカラー Wiener 核と同様にベクトル Wiener 核  $A_n (n \geq 1)$  は  $\sigma^n$  のオーダーである。よって、高次の Wiener 核を無視して低次の Wiener 核を近似的に決定したのちに高次の影響を取り入れるという方法で次数の小さいものから順次求めることができる。

$A_0$  を求める

(2.168) で  $A_2 \equiv 0$  として高次の項の影響を無視する。

$$A_1(\lambda_1 | \lambda_0) \simeq \mathcal{P}[\lambda_1] N(\lambda_0) + \mathcal{P}[\lambda_1] A_0(\lambda_0) \quad (2.171)$$

これを (2.167) に代入すると

$$A_0(\lambda_0) = \int \mathcal{M}[\lambda_1] \{ \mathcal{P}[\lambda_1] N(\lambda_0) + \mathcal{P}[\lambda_1] A_0(\lambda_0) \} d\lambda_1 \quad (2.172)$$

となる。この段階では  $\Gamma, C$  を

$$\Gamma(\lambda_0) \equiv \int \mathcal{M}(\lambda_1 | \lambda_0 + \lambda_1) \mathcal{P}(\lambda_1 | \lambda_0) d\lambda_1 \quad (2.173)$$

$$C(\lambda_0) \equiv [I - \Gamma(\lambda_0)]^{-1} \quad (2.174)$$

と定義しておく。これらを用いると

$$[I - \Gamma(\lambda_0)] A_0(\lambda_0) = \Gamma(\lambda_0) N(\lambda_0) \quad (2.175)$$

となる。これより

$$A_0(\lambda_0) = [I - \Gamma(\lambda_0)]^{-1} \Gamma(\lambda_0) N(\lambda_0) \quad (2.176)$$

$$= C\Gamma(\lambda_0) N(\lambda_0) \quad (2.177)$$

が得られる。(2.173) より自己相互作用素  $\Gamma$  は散乱で次数が一度増加したものが再び散乱をうけてもとの状態にもどる散乱過程を表していることがわかる。図 2.18 にその様子を示した。また、く

りこみ作用素 $C$ は下に示すように $\Gamma$ の効果を0回から無限回分まで含んでいることがわかる。

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= [I - \Gamma(\lambda)]^{-1} \\ &= I + \Gamma(\lambda) + \Gamma^2(\lambda) + \Gamma^3(\lambda) + \cdots \end{aligned} \quad (2.178)$$

したがって、(2.177)より0次のWiener核 $A_0$ は入射波ベクトルが図2.18で示されるような散乱を1回受けた結果から無限回受けた結果までの総和であることがわかる。

$A_1$ を求める

(2.169)で $A_3 \equiv 0$ とする。

$$A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \simeq \frac{1}{2} \mathcal{P}[\lambda_2] A_1(\lambda_1|\lambda_0) + \frac{1}{2} \mathcal{P}[\lambda_1] A_1(\lambda_2|\lambda_0) \quad (2.179)$$

これを(2.168)に代入すると

$$\begin{aligned} A_1(\lambda_1|\lambda_0) &= \mathcal{P}[\lambda_1] N(\lambda_0) + \mathcal{P}[\lambda_1] A_0(\lambda_0) \\ &\quad + \int \mathcal{M}[\lambda_2] \mathcal{P}[\lambda_2] A_1(\lambda_1|\lambda_0) d\lambda_2 \\ &\quad + \int \mathcal{M}[\lambda_2] \mathcal{P}[\lambda_1] A_1(\lambda_2|\lambda_0) d\lambda_2 \end{aligned} \quad (2.180)$$

となる。上式は $A_1$ に関する積分方程式である。ここで、第3項と第4項は同じオーダーの項であるが第4項を無視すると

$$A_1(\lambda_1|\lambda_0) = C \{ \mathcal{P}[\lambda_1] N(\lambda_0) + \mathcal{P}[\lambda_1] A_0(\lambda_0) \} \quad (2.181)$$

が得られる。この近似を積分方程式の0次近似と呼ぶ。

$A_2$ を求める

$n=3$ の式で $A_4=0$ とする。

$$\begin{aligned} A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) &\simeq \frac{1}{3} \mathcal{P}[\lambda_3] A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) + \frac{1}{3} \mathcal{P}[\lambda_2] A_2(\lambda_1, \lambda_3|\lambda_0) \\ &\quad + \frac{1}{3} \mathcal{P}[\lambda_1] A_2(\lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) \end{aligned} \quad (2.182)$$

これを(2.169)に代入し、積分方程式の0次近似をすると

$$A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) = \frac{1}{2} C \mathcal{P}[\lambda_2] A_1(\lambda_1|\lambda_0) + \frac{1}{2} C \mathcal{P}[\lambda_1] A_1(\lambda_2|\lambda_0) \quad (2.183)$$

が得られる。これに(2.181)を代入すると(2.189)が得られる。

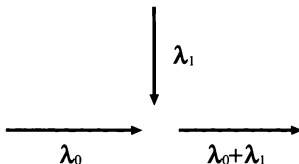


図 2.15: 上昇作用素。入射波 $\lambda_0$ に Bragg ベクトル $\lambda_1$ が加算されて散乱波 $\lambda_0 + \lambda_1$ となる散乱過程を意味し、Wiener 核の次数を+1 する。

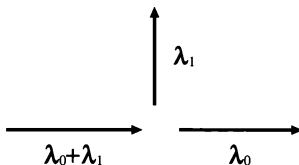


図 2.16: 下降作用素。入射波 $\lambda_0 + \lambda_1$ から Bragg ベクトル $\lambda_1$ が減算されて散乱波 $\lambda_0$ となる散乱過程を意味し、Wiener 核の次数を-1 する。

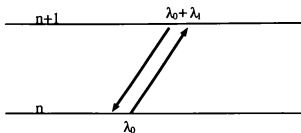


図 2.17: 上昇作用素と下降作用素。 $\lambda_1$  加算されて散乱波  $\lambda_0 + \lambda_1$  となったものが再度の散乱により  $\lambda_1$  減算されて入射波と同じ波数  $\lambda_0$  になる散乱過程。Wiener の次数は不変。 $\lambda_0 + \lambda_1$  は中間状態である。

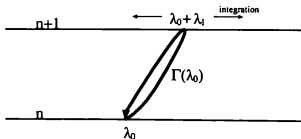


図 2.18: 自己相互作用素。図 2.17 で表される散乱過程をすべての中間状態にわたって積分したもの。

$A_1$  の計算結果を  $A_0$  に反映させる

(2.181) を (2.167) に代入すると

$$\begin{aligned} A_0(\lambda_0) &= \int M[\lambda_1] A_1(\lambda_1|\lambda_0) d\lambda_1 \\ &= \int M[\lambda_1] C\{P[\lambda_1] N(\lambda_0) + P[\lambda_1] A_0(\lambda_0)\} d\lambda_1 \\ &= \int M(\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1) C(\lambda_0 + \lambda_1) P(\lambda_1|\lambda_0) d\lambda_1 N(\lambda_0) \\ &\quad + \int M(\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1) C(\lambda_0 + \lambda_1) P(\lambda_1|\lambda_0) d\lambda_1 A_0(\lambda_0) \end{aligned} \quad (2.184)$$

となる。これを (2.172)-(2.174) と比較すると  $\Gamma$  を以下のように変更する必要があることがわかる。

$$\Gamma_{\text{(new)}}(\lambda_0) = \int M(\lambda_1|\lambda_0) C(\lambda_0 + \lambda_1) P(\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1) d\lambda_1 \quad (2.185)$$

この段階では右辺の  $C$  に含まれる  $\Gamma$  は (2.173) で定義したものである。

同様にして  $A_2$  の計算結果を  $A_1$  に反映させると

$$\Gamma_{\text{(new)}}(\lambda_0 + \lambda_1) = \int M(\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) C(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) P(\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1) d\lambda_2 \quad (2.186)$$

となる<sup>5</sup>。この結果 (2.185) の右辺の  $C$  に含まれる  $\Gamma$  は  $\Gamma_{\text{(new)}}$  となる。この操作を無限次まで繰り返すと  $\Gamma$  は (2.160), (2.161) で定義したものと厳密に等しくなる。ここで得られた自己相互作用素は図 2.19 で表されるようなものであり、無限に高い次数まで上がった後にもとの状態に戻るといふ散乱過程の効果も含んでいる。しかし、(2.160), (2.161) は積分方程式であるので、数値計算では無限に高い次数の効果まで含めるのは不可能である。なお、2.2 節で求めた解は  $\Gamma$  を (2.173) で近似したものに相当する。

## Wiener 核の 0 次近似解

より高次の Wiener 核の 0 次近似解も同様にして求めることができる。0 次近似解の結果を以下にまとめた。

$$A_0(\lambda_0) = \Gamma^* N(\lambda_0) \quad (2.187)$$

$$A_1(\lambda_1|\lambda_0) = P^*[\lambda_1] \{N(\lambda_0) + \Gamma^* N(\lambda_0)\} \quad (2.188)$$

$$A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) = \frac{1}{2} \{P^*[\lambda_2] P^*[\lambda_1] + P^*[\lambda_1] P^*[\lambda_2]\} \{N(\lambda_0) + \Gamma^* N(\lambda_0)\} \quad (2.189)$$

ただし

$$P^*[\lambda_1] \langle \lambda_0 \rangle \equiv C(\lambda_0 + \lambda_1) P(\lambda_1|\lambda_0) \quad (2.190)$$

$$\Gamma^*(\lambda) \equiv C(\lambda) \Gamma(\lambda) \quad (2.191)$$

<sup>5</sup>積分方程式の 0 次近似を行なった。



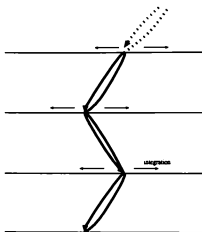


図 2.19: 自己相互作用素。無限に高い次数へ変化した後にもとの状態に戻る散乱過程の効果を含む。

であり、 $\mathcal{P}^*$ をくりこまれた上昇作用素、 $\Gamma^*$ をくりこまれた自己相互作用素と呼ぶ。くりこまれた上昇作用素  $\mathcal{P}^*$  はスカラー Wiener 核表現で導入した散乱因子に相当するもので、無限回散乱の効果を含む衣を着た散乱を表す。また、一般項は

$$A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = \frac{1}{n!} \sum_{(i)}^{\text{all orders}} \prod_{j=1}^n \mathcal{P}^*[\lambda_{i_j}] A(\lambda_0) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.192)$$

となる。ここで、 $\sum_{(i)}^{\text{all orders}}$  は添字  $(i_1, \dots, i_n)$  のすべての順列についての和を意味する。ただし

$$A(\lambda_0) \equiv \{I + C(\lambda_0)\Gamma(\lambda_0)\} N(\lambda_0) = C(\lambda_0)N(\lambda_0) \quad (2.193)$$

で、くりこまれた入射波ベクトルに相当するものである。

#### 2.4.4 積分方程式の高次近似

0 次近似で無視した (2.180) の第 4 項の効果を取り入れるためには 0 次近似解をもとに逐次近似法を用いればよい。0 次近似での結果を用いると (2.168) は

$$A_1(\lambda_1 | \lambda_0) = A_1^{(0)}(\lambda_1 | \lambda_0) + \int T[\lambda_1 \leftarrow \lambda_2] A_1(\lambda_2 | \lambda_0) d\lambda_2 \quad (2.194)$$

$$T[\lambda_1 \leftarrow \lambda_2] \equiv CM[\lambda_2]CP[\lambda_1] \quad (2.195)$$

となる。ただし、 $A_1^{(n)}$  は  $n$  次近似を表す。以下に示すように 0 次近似解より 1 次近似解が、1 次近似解より 2 次近似解が得られる。

$$A_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_0) = A_1^{(0)}(\lambda_1|\lambda_0) + \int T[\lambda_1 - \lambda_2] A_1^{(0)}(\lambda_2|\lambda_0) d\lambda_2 \quad (2.196)$$

$$\begin{aligned} A_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_0) = A_1^{(0)}(\lambda_1|\lambda_0) &+ \int T[\lambda_1 - \lambda_2] A_1^{(0)}(\lambda_2|\lambda_0) d\lambda_2 \\ &+ \int T[\lambda_1 - \lambda_2] T[\lambda_2 - \lambda_3] A_1^{(0)}(\lambda_3|\lambda_0) d\lambda_2 d\lambda_3 \end{aligned} \quad (2.197)$$

この操作を繰り返すことによって

$$\begin{aligned} A_1^{(\infty)}(\lambda_1|\lambda_0) = A_1^{(0)}(\lambda_1|\lambda_0) &+ \int T[\lambda_1 - \lambda_2] A_1^{(0)}(\lambda_2|\lambda_0) d\lambda_2 \\ &+ \int T[\lambda_1 - \lambda_2] T[\lambda_2 - \lambda_3] A_1^{(0)}(\lambda_3|\lambda_0) d\lambda_2 d\lambda_3 \\ &\vdots \\ &+ \int T[\lambda_1 - \lambda_2] \cdots T[\lambda_{n-1} - \lambda_n] A_1^{(0)}(\lambda_n|\lambda_0) d\lambda_2 \cdots d\lambda_n \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.198)$$

が得られる。

#### 2.4.5 一般解

0 次近似では積分方程式を解くという観点により同じオーダーの項を無視する項と無視しない項にわけた。ここでは、通常の摂動論と同様に同じオーダーの項を平等に扱い<sup>6</sup>のオーダーごとに評価していく。

$\mathcal{P}, \mathcal{M}, A_n, N(\lambda_0)$  を以下のように再定義すると

$$P_1 \equiv \mathcal{P}[\lambda_1] \quad (2.199)$$

$$M_1 \equiv \int \mathcal{M}[\lambda_1] (\text{より右側にある要素}) d\lambda_1^6 \quad (2.200)$$

$$A_n(1, 2, \dots, n) \equiv A_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \quad (2.201)$$

$$N \equiv N(\lambda_0) \quad (2.202)$$

階層方程式は

$$A_0 = M_1 A_1(1) \quad (2.203)$$

$$A_1(1) = P_1 N + P_1 A_0 + 2M_2 A_2(1, 2) \quad (2.204)$$

$$A_2(1, 2) = \frac{1}{2} P_2 A_1(1) + \frac{1}{2} P_1 A_1(2) + 3M_3 A_3(1, 2, 3) \quad (2.205)$$

<sup>6</sup>例:  $M_1 P_1 P_2 N = \int \mathcal{M}[\lambda_1] \mathcal{P}[\lambda_1] \mathcal{P}[\lambda_2] N(\lambda_0) d\lambda_1$

$$A_3(1, 2, 3) = \frac{1}{3}P_3A_2(1, 2) + \frac{1}{3}P_2A_2(1, 3) + \frac{1}{3}P_1A_2(2, 3) + 4M_4A_4(1, 2, 3, 4) \quad (2.206)$$

となる。次数ごとに評価した結果を低次のものから順に示す。

1 次まで

$$A_1(1) = P_1N \quad (2.207)$$

2 次まで

$$A_0 = M_1P_1N \quad (2.208)$$

$$A_2(1, 2) = \frac{1}{2}P_2P_1N + \frac{1}{2}P_1P_2N \quad (2.209)$$

3 次まで

$$A_1(1) = \{P_1 + P_1M_2P_2 + M_2P_2P_1 + M_2P_1P_2\}N \quad (2.210)$$

$$A_3(1, 2, 3) = \frac{1}{6}\{P_3P_2P_1 + P_3P_1P_2 + P_2P_1P_3 + P_2P_3P_1 + P_1P_2P_3 + P_1P_3P_2\}N \quad (2.211)$$

4 次まで

$$A_0 = \{M_1P_1 + M_1P_1M_2P_2 + M_1M_2P_2P_1 + M_1M_2P_1P_2\}N \quad (2.212)$$

$$A_2(1, 2) = \frac{1}{2}\{P_2P_1 + P_1P_2 + P_2P_1M_3P_3 + P_2M_3P_3P_1 + P_2M_3P_1P_3 + P_1P_2M_3P_3 + P_1M_3P_3P_2 + P_1M_3P_2P_3 + M_3P_3P_2P_1 + M_3P_3P_1P_2 + M_3P_2P_1P_3 + M_3P_2P_3P_1 + M_3P_1P_2P_3 + M_3P_1P_3P_2\}N \quad (2.213)$$

$A_n$ に含まれる一般項の規則

より高次の評価も同様にできる。また、 $A_n$ に含まれる項は次のような規則に従う。

- $P$ は少なくとも $P_n$ まではある
- $P_j : (j > n)$ に対応した $M_j$ がある
- $M_j$ は $P_j$ より左にある
- $P_j$ の添字は任意の順列
- $M_j$ の添字は左から  $j = n+1, n+2, \dots$

以上の条件をみたすすべての項の和をとり  $n!$ でわる。 $n$ が偶数のときは偶数次の摂動項のみを含み、奇数のときは奇数次の摂動項のみを含む。例えば  $n = 5$  のときは 5, 7, 9, 11, 13, ... 次の摂動項を含む。各摂動項の組合せの総数は  $M$  が  $m$  こ、 $P$  が  $n$  こある場合で

$$\frac{(m+n)!}{2^m m!} \quad (2.214)$$

となる。

上に示した規則に従って摂動の次数を無限に上げることにより、完全な解が形式的に与えられる。しかし、有限個の項で無限回散乱の効果を取り込むことは不可能で発散が生じる。

初等的な摂動法と同様に、この方法では発散の困難を解消することは不可能であるが、これは同じオーダーの項を平等に扱ったことによる。0 次近似解では同じオーダーの項のうち左辺へ移項してまとめることのできる項以外を無視し、(2.176) のように逆行列を用いて解いている。逆行列を用いると (2.178) に示したように有限個の項で無限回の散乱を表現できるのである<sup>7</sup>。

## 2.4.6 くりこみ理論との比較

摂動法における発散を無限回の相互作用を考慮することによって解消するという理論ではくりこみ理論が有名である。量子電磁気学におけるくりこみ理論では無限回の自己相互作用の影響を電子の質量・電荷に含めることによって発散を取り除くが、そのときくりこまれるのは図 2.20(実線は電子、破線は光子を表す) に示すファインマン図で表される散乱過程である [52]<sup>8</sup>。

Wiener-Ito 展開は光子場のフォック空間表示と対応がつくものであるが [66]、さらに、入射波と散乱波を電子波に対応付けをすることによって量子電磁気学でのファインマン図による表現と対比できるようになる<sup>9</sup>。0 次の Wiener 核は光子が 0 個の状態に、 $n$  次の Wiener 核は光子が  $n$  個の状態に、上昇作用素は光子の生成作用素に対応する。Wiener 核のパラメータについての対称

<sup>7</sup> スカラー Wiener 核を用いた表現では散乱因子の分母に  $\xi, \eta$  を含むことが、ベクトル Wiener 核において逆行列を用いることに相当する。

<sup>8</sup> ここに挙げたのは質量のくりこみに関するものである。

<sup>9</sup> 電子・陽電子対の生成・消滅は考えない。つまり、電荷のくりこみは議論しない。

性は光子の交換対称性に相当する。また、数値計算に用いた散乱因子表現の解にくりこまれている散乱過程は図 2.20 で表されるものである。さらに、ベクトル Wiener 核表現による 0 次近似解には図 2.21 に示す散乱過程もくりこまれている。これらの図 2.20、図 2.21 に示した散乱過程を非交差散乱過程と呼び、0 次近似にくりこまれていない図 2.22 に示したような散乱過程を交差散乱過程と呼ぶ。

このように、くりこみの手法と確率汎関数法には数学的構造に類似点があり、実際、場の量子論で用いられる方法で不規則表面による波動散乱を取り扱う試みもなされている [43]–[51]。しかし、この二種類の手法は理論の基本的な構成が全く異なっている。くりこみ理論では摂動論での素過程を無限個集めることによって発散を解消しているが、確率汎関数法では階層方程式を 0 次近似することによって自然に有限確定な解を得ているので発散を生む摂動論の素過程とは直接の関係はない。これまでに確率汎関数法で得られた解は無数回の散乱過程の効果を含むと述べたが、ここでいう無数回の散乱とは無限個の摂動項で表される散乱という意味であり、一旦、得られた解を通常の摂動論の言葉で表現しなおしたものである。

## 2.4.7 ベクトル Wiener 核とスカラー Wiener 核の比較

この章で導入したベクトル Wiener 核による表現は数値計算に用いたスカラー Wiener 核による表現と数学的には同等である。スカラー Wiener 核は電磁波の 2 つの偏波成分ごとに分解されているので波動の物理量を表現するのに適している。一方、ベクトル Wiener 核は等価境界条件への代入を容易にするために  $x_y$  平面成分と  $z$  方向成分に分解されているので階層方程式を見通しよく表現し、この章で扱ったような解や方程式の構造、解に含まれる散乱の過程、方程式の解法などの議論に適している。しかし、ベクトル Wiener 核表現の場合、形式的には整理された解が得られるが、明示的な形を得ようとすると複雑になり、その解が発散するか否かを判断するのも困難である。実際に、数値計算する場合にはスカラー Wiener 核表現、特に、散乱因子表現を用いるべきである。

スカラー Wiener 核表現は波動を表現するのに適した波動方程式優先の表現で、ベクトル Wiener 核表現は散乱過程を表現するのに適した境界条件優先の表現であるといえる。これらの表現は (2.154) – (2.156) によって互いに変換が可能である。

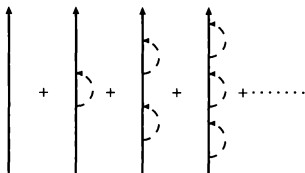


図 2.20: 1 光子状態のみを含む散乱過程

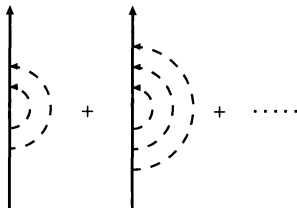


図 2.21: 同時に複数個の光子が生じる非交差散乱過程。光子吸収と放出の順序は互いに逆で、中間状態を表す線(内線)は交差していない。

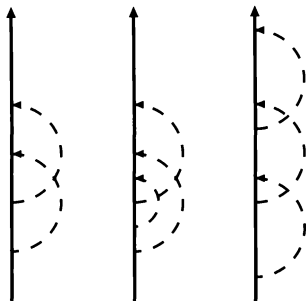


図 2.22: 交差散乱過程。中間状態は複数の光子からなり、内線に交差がある。

## 第 3 章

# 不規則誘電体導波路による散乱

完全導体表面上の誘電体層からなる誘電体導波路に空気側から電磁波が入射した場合の散乱を取り扱う (図 3.1.3.2 参照)。この誘電体導波路は複数の導波モードを持ち、モードの数は誘電体層の厚さに依存する。誘電体-完全導体間の境界面は平坦面、誘電体-空気間の境界面は (2.1) で表される 2 次元不規則表面であるとする。本章では、1 次元不規則表面の場合にみられた随伴強調散乱が、2 次元不規則表面の場合には存在しないことを示す。

3.1 節で解の形を定め、3.2 節で近似解を求める。3.3 節では誘電体導波路のもつ導波モードについて議論する。3.4.3.5 節では散乱分布の数値計算結果を示し、散乱光干渉、後方強調散乱等について議論する。

## 3.1 電磁場の表現

### 3.1.1 波動ベクトルと偏波ベクトル

図 3.3 に示したように波動ベクトル  $k_i$  を

$$k_i = \lambda + \text{sign}([k_i]_z) S_i(\lambda) e_z, \quad i = \begin{cases} 1 & \text{空気中 } z > f(x) \\ 2 & \text{誘電体内 } -a < z < f(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$S_i(\lambda) = \sqrt{k_i^2 - \lambda^2}, \quad k_i = |k_i|, \quad \lambda = |\lambda|, \quad n = k_2/k_1 \quad (3.2)$$

とおく。ここで、 $\lambda$  は  $k_i$  の  $xy$  平面への射影、 $S_i(\lambda)$  は  $z$  成分の絶対値である。 $k_i, i = 1, 2$  はそれぞれ、空気中、誘電体内での波動ベクトルを表す。 $k_i$  に対応する TE (水平 または s) 偏波および TM (TM または p) 偏波ベクトル  $e_{\parallel}(k_i), e_{\perp}(k_i)$  を

$$e_{\parallel}(k_i) \equiv \frac{k_i \times e_z}{|k_i \times e_z|} \quad (3.3)$$

$$e_{\perp}(k_i) \equiv \frac{k_i \times e_{\parallel}(k_i)}{|k_i \times e_{\parallel}(k_i)|} \quad (3.4)$$



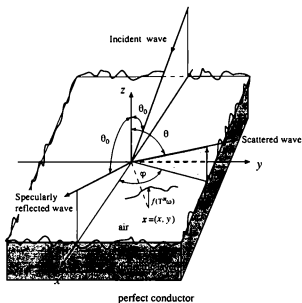


図 3.1: 誘電体導波路による電磁波散乱の全体図

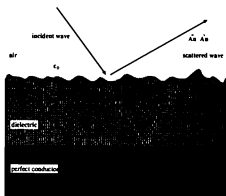


図 3.2: 不規則誘電体導波路の断面図

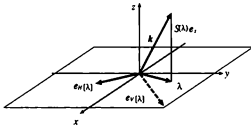


図 3.3: 波動ベクトルと偏波ベクトル

と定義する。 $\lambda$ を用いて表すと

$$e_H^{i(\pm)}[\lambda] \equiv e_H(k_i) = \frac{\lambda \times e_z}{\lambda} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} e_V^{i(\pm)}[\lambda] \equiv e_V(k_i) &= \frac{k_i \times (\lambda \times e_z)}{k_i \lambda} \\ &= \pm \frac{S_i(\lambda)}{k_i \lambda} \lambda - \frac{\lambda}{k_i} e_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。ここで、 $(+)$ 、 $(-)$  は  $z$  方向上向き、下向きの波動を意味する。例えば、 $e_V^{1(+)}$  は空気側での上向き TM 偏波となる。さらに、(3.5)、(3.6) を  $xy$  平面成分と  $z$  方向成分とに分ける。

$xy$  平面成分

$$e_H^{i(\pm)}[\lambda] = \frac{\lambda \times e_z}{\lambda} \quad (3.7)$$

$$e_V^{i(\pm)}[\lambda] = \pm \frac{S_i(\lambda)}{k_i \lambda} \lambda \quad (3.8)$$

$z$  方向成分

$$e_V^{i(\pm)}[\lambda] = -\frac{\lambda}{k_i} e_z \quad (3.9)$$

また、これらの偏波ベクトルは以下のような関係式を満たす。

$$e_H^{1(+)}[\lambda] = e_H^{1(-)}[\lambda] = e_H^{2(+)}[\lambda] = e_H^{2(-)}[\lambda] \equiv e_H[\lambda] \quad (3.10)$$

$$e_{V_{xy}}^{1(+)}[\lambda] = -e_{V_{xy}}^{1(-)}[\lambda] \equiv e_{V_{xy}}^1[\lambda] \quad (3.11)$$

$$e_{V_{xy}}^{2(+)}[\lambda] = -e_{V_{xy}}^{2(-)}[\lambda] \equiv e_{V_{xy}}^2[\lambda] \quad (3.12)$$

$$e_{V_z}^{1(+)}[\lambda] = e_{V_z}^{1(-)}[\lambda] \equiv e_{V_z}^1[\lambda] \quad (3.13)$$

$$e_{V_z}^{2(+)}[\lambda] = e_{V_z}^{2(-)}[\lambda] \equiv e_{V_z}^2[\lambda] \quad (3.14)$$

## 3.1.2 境界条件

空気 誘電体境界  $z = f(x)$  における境界条件は

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^2) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^1 - \mathbf{H}^2) = 0 \quad \text{on } z = f(\mathbf{T}^x \omega) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f - \mathbf{e}_z}{(|\nabla f|^2 + 1)^{1/2}} \quad (3.16)$$

完全導体 誘電体境界  $z = -a$  における境界条件は

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}^2 = 0 \quad \text{on } z = -a \quad (3.17)$$

と表現できる。ここで、 $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$  は空気側の、 $\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2$  は誘電体内の電場、磁場である。

## 3.1.3 解の形

確率的 Floquet の定理による不規則散乱波の電界  $E^1(x, z; \omega | \lambda_0)$  は Wiener-Itô 展開により、以下のように表現できる (2.1.6 参照)。ここで、 $\lambda_0$  は入射方向を表す。

[空気側  $z > 0$ ]

$$\begin{aligned} E^1(x, z; \omega | \lambda_0) = & \{e_{\parallel}^{1(-)}[\lambda_0]N^{\parallel}(\lambda_0) + e_{\perp}^{1(-)}[\lambda_0]N^{\perp}(\lambda_0)\}e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS_1(\lambda_0)z} \\ & + \{e_{\parallel}^{1(+)}[\lambda_0]A_{\parallel}^{\parallel}(\lambda_0) + e_{\perp}^{1(+)}[\lambda_0]A_{\parallel}^{\perp}(\lambda_0)\}e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} + iS_1(\lambda_0)z} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \{e_{\parallel}^{1(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]A_{\parallel}^{\parallel}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ & + e_{\perp}^{1(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]A_{\parallel}^{\perp}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)\}e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} + iS_1(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)z} \\ & \times \hat{\Pi}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

[誘電体側  $-a < z < 0$ ]

$$\begin{aligned} E^2(x, z; \omega | \lambda_0) = & \{e_{\parallel}^{2(-)}[\lambda_0]e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0)(z+a)} - e_{\parallel}^{2(+)}[\lambda_0]e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} + iS_2(\lambda_0)(z+a)}\}C_0^{\parallel}(\lambda_0) \\ & + \{e_{\perp}^{2(-)}[\lambda_0]e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0)(z+a)} + e_{\perp}^{2(+)}[\lambda_0]e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} + iS_2(\lambda_0)(z+a)}\}C_0^{\perp}(\lambda_0) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \{[e_{\parallel}^{2(-)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(z+a)} \\ & - e_{\parallel}^{2(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} + iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(z+a)}]\}C_n^{\parallel}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ & + \{e_{\perp}^{2(-)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(z+a)} \\ & + e_{\perp}^{2(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} + iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(z+a)}\}C_n^{\perp}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ & \times \hat{\Pi}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで  $N^H, N^V$  は入射波の TE 偏波成分, TM 偏波成分を表す。 $A_n^H, C_n^H$  は散乱波の TE 偏波成分を,  $A_n^V, C_n^V$  は TM 偏波成分を意味する。第 2 章では, TE 偏波入射と TM 偏波入射の場合を取り扱ったが, 本章では, より一般的な偏波での入射に対応可能な理論とするために入射偏波の状態を  $N^H, N^V$  を用いて表現する。

散乱波の磁界  $H^i$  も同様に表現できる。

[空気側  $z > 0$ ]

$$\begin{aligned}
 H^i(x, z; \omega | \lambda_0) = & \left\{ e_V^{i(-)}[\lambda_0] N^H(\lambda_0) - e_H^{i(-)}[\lambda_0] N^V(\lambda_0) \right\} e^{i\lambda_0 x - iS_1(\lambda_0)z} \\
 & + \left\{ e_V^{i(+)}[\lambda_0] A_0^H(\lambda_0) - e_H^{i(+)}[\lambda_0] A_0^V(\lambda_0) \right\} e^{i\lambda_0 x + iS_1(\lambda_0)z} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \left\{ e_V^{i(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n] A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \right. \\
 & \quad \left. - e_H^{i(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n] A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \right\} e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x + iS_1(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)z} \\
 & \quad \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \times \frac{1}{Z_1}
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

[誘電体内  $-a < z < 0$ ]

$$\begin{aligned}
 H^2(x, z; \omega | \lambda_0) = & \left\{ e_V^{2(-)}[\lambda_0] e^{i\lambda_0 x - iS_2(\lambda_0)(z+a)} - e_V^{2(+)}[\lambda_0] e^{i\lambda_0 x + iS_2(\lambda_0)(z+a)} \right\} C_0^H(\lambda_0) \\
 & - \left\{ e_H^{2(-)}[\lambda_0] e^{i\lambda_0 x - iS_2(\lambda_0)(z+a)} + e_H^{2(+)}[\lambda_0] e^{i\lambda_0 x + iS_2(\lambda_0)(z+a)} \right\} C_0^V(\lambda_0) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \left\{ e_V^{2(-)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n] e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x - iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(z+a)} \right. \\
 & \quad \left. - e_V^{2(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n] e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x + iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(z+a)} \right\} C_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\
 & - \left\{ e_H^{2(-)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n] e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x - iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(z+a)} \right. \\
 & \quad \left. + e_H^{2(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n] e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x + iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(z+a)} \right\} C_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\
 & \quad \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \times \frac{1}{Z_2}
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで,  $Z_1, Z_2$  は空気, 誘電体の特性インピーダンスである。なお, 磁界表現では  $e_V^{i(\pm)}, -e_H^{i(\pm)}$  がそれぞれ, TE 偏波, TM 偏波に対応する。また, これらの Wiener-Itô 展開で表現された電磁界は導体表面  $z = -a$  上の境界条件 (3.17) はすでにみたす形式となっており, Wiener 核 ( $A_n^H, A_n^V, C_n^H, C_n^V$ ) は誘電体と空気との間の不規則表面上の境界条件により求められる。

### 3.1.4 散乱波動場の統計量

完全導体による散乱の場合と同様にコヒーレント, インコヒーレント散乱を Wiener 核で表現できる。

## コヒーレント散乱

$$\begin{aligned} \langle E^1(x, z; \omega | \lambda_0) \rangle = & \{ e_H^{1(-)} | \lambda_0 \rangle N^H(\lambda_0) + e_V^{1(-)} | \lambda_0 \rangle N^V(\lambda_0) \} e^{i\lambda_0 x - iS_1(\lambda_0)z} \\ & + \{ e_H^{1(+)} | \lambda_0 \rangle A_0^H(\lambda_0) + e_V^{1(+)} | \lambda_0 \rangle A_0^V(\lambda_0) \} e^{i\lambda_0 x + iS_1(\lambda_0)z} \end{aligned} \quad (3.22)$$

## インコヒーレント散乱

$$P(\theta | \theta_0) \equiv P^H(\theta | \theta_0) + P^V(\theta | \theta_0) \quad (3.23)$$

$$P^H(\theta | \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^H(\theta | \theta_0) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} = & k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^H(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \\ & + 2! \int_{R_2} |A_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \cdots \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$P^V(\theta | \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^V(\theta | \theta_0) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} = & k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^V(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \\ & + 2! \int_{R_2} |A_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \cdots \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$P_1^H(\theta | \theta_0) = k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^H(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \quad (3.28)$$

$$P_2^H(\theta | \theta_0) = 2! k_1^2 \cos^2 \theta \int_{R_2} |A_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 \quad (3.29)$$

$$P_3^H(\theta | \theta_0) = 3! k_1^2 \cos^2 \theta \int \int_{R_2} |A_3^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (3.30)$$

⋮

$$P_1^V(\theta | \theta_0) = k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^V(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \quad (3.31)$$

$$P_2^V(\theta | \theta_0) = 2! k_1^2 \cos^2 \theta \int_{R_2} |A_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 \quad (3.32)$$

$$P_3^V(\theta | \theta_0) = 3! k_1^2 \cos^2 \theta \int \int_{R_2} |A_3^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (3.33)$$

⋮

$P_n^{HH}, P_n^{HV}$  等も (2.98), (2.99) と同様に定義できる。

## 3.2 近似解法

## 3.2.1 等価境界条件

$xy$ 平面上での電磁界を

$$E^1(x, 0) - E^2(x, 0) = E_{xy}(x) + E_z(x)e_z \quad (3.34)$$

$$H^1(x, 0) - H^2(x, 0) = H_{xy}(x) + H_z(x)e_z \quad (3.35)$$

と表す。不規則表面の粗さが十分小さく、かつ滑らか、すなわち  $k_z^2 \langle f^2 \rangle, \langle |\nabla f|^2 \rangle \ll 1$  である場合を考え、境界条件 (3.15), (3.16) を  $f$  に関して 1 次のオーダーまでで展開すると、 $xy$ 平面上での等価境界条件式

$$E_{xy}(x) + f(T^x \omega) \frac{\partial}{\partial z} E_{xy}(x) + \nabla f(T^x \omega) E_z(x) = 0 \quad (3.36)$$

$$H_{xy}(x) + f(T^x \omega) \frac{\partial}{\partial z} H_{xy}(x) + \nabla f(T^x \omega) H_z(x) = 0 \quad (3.37)$$

が得られる (2.2.1 節参照)。

## 3.2.2 階層方程式

Wiener-Ito 展開で表現された電磁界を等価境界条件式 (3.36), (3.37) に代入し、Wiener-Ito 展開の直交性を用いると、Wiener 核に関する階層方程式が得られる。これらの方程式は電界の水平、垂直成分、磁界の水平、垂直成分の 4 成分からなる。以下のような、ベクトル、行列を定義し、行列形式で表現する。

ベクトル Wiener 核

$$A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ \frac{2}{\sqrt{\mu_3}} C_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ \frac{2}{\sqrt{\mu_3}} C_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

入射ベクトル Wiener 核

$$N(\lambda_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} N^H(\lambda_0) \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} N^V(\lambda_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

結合行列

$$J(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} e_H[\lambda] \\ e_{V_{xy}}[\lambda] \\ |e_{V_{xy}}[\lambda]| \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\odot \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} e_{11}[\lambda] & \sqrt{\mu_1} e_{1xy}^i[\lambda] & \sqrt{\mu_2} i \sin[S_2(\lambda)a] e_{11}[\lambda] & -\sqrt{\mu_2} i \sin[S_2(\lambda)a] e_{1xy}^i[\lambda] \\ \sqrt{\epsilon_1} e_{1xy}^i[\lambda] & -\sqrt{\epsilon_1} e_{11}[\lambda] & \sqrt{\epsilon_2} \cos[S_2(\lambda)a] e_{1xy}^i[\lambda] & \sqrt{\epsilon_2} \cos[S_2(\lambda)a] e_{11}[\lambda] \end{bmatrix}$$

$$J_0(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} e_{11}[\lambda] \\ \frac{e_{1xy}^i[\lambda]}{i e_{1xy}^i[\lambda]} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} e_{11}[\lambda] & -\sqrt{\mu_1} e_{1xy}^i[\lambda] & 0 & 0 \\ -\sqrt{\epsilon_1} e_{1xy}^i[\lambda] & -\sqrt{\epsilon_1} e_{11}[\lambda] & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

散乱行列

$$P(\lambda_1|\lambda_0) \equiv -iF(\lambda_1) \begin{bmatrix} e_{11}[\lambda] \\ \frac{e_{1xy}^i[\lambda]}{i e_{1xy}^i[\lambda]} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\odot \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} f_{11}^i[\lambda_0] & \sqrt{\mu_1} f_{11}^i[\lambda_1|\lambda_0] & \sqrt{\mu_2} f_{11}^i[\lambda_0] \cos[S_2(\lambda_0)a] & -\sqrt{\mu_2} f_{11}^i[\lambda_1|\lambda_0] \cos[S_2(\lambda_0)a] \\ \sqrt{\epsilon_1} f_{11}^i[\lambda_1|\lambda_0] & -\sqrt{\epsilon_1} f_{11}^i[\lambda_0] & \sqrt{\epsilon_2} f_{11}^i[\lambda_1|\lambda_0] i \sin[S_2(\lambda_0)a] & \sqrt{\epsilon_2} f_{11}^i[\lambda_0] i \sin[S_2(\lambda_0)a] \end{bmatrix}$$

$$P_0(\lambda_1|\lambda_0) \equiv -iF(\lambda_1) \begin{bmatrix} e_{11}[\lambda] \\ \frac{e_{1xy}^i[\lambda]}{i e_{1xy}^i[\lambda]} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} -\sqrt{\mu_1} f_{11}^i[\lambda_0] & \sqrt{\mu_1} f_{11}^i[\lambda_1|\lambda_0] & 0 & 0 \\ \sqrt{\epsilon_1} f_{11}^i[\lambda_1|\lambda_0] & \sqrt{\epsilon_1} f_{11}^i[\lambda_0] & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$f_{11}^i[\lambda_0] \equiv S_i(\lambda_0) e_{11}[\lambda_0] \quad (3.44)$$

$$f_{11}^i[\lambda_1|\lambda_0] \equiv S_i(\lambda_0) e_{1xy}^i[\lambda_0] + \lambda_1 e_{11}^i[\lambda_0] \quad (3.45)$$

ここで $\epsilon_1, \epsilon_2$ は空気の誘電率を、 $\mu_1, \mu_2$ は透磁率を表す。また、演算子 $\odot$ は以下のように定義される。

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot A & a \cdot B \\ b \cdot A & b \cdot B \\ a \cdot C & a \cdot D \\ b \cdot C & b \cdot D \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

ここで $a, A$ 等は $2 \times 1$ の列ベクトルで $a \cdot A$ は内積を意味する。

結合行列は空気側と誘電体内の電磁界の関係を記述するものであり、散乱行列は不規則表面による散乱を表し、異なる次数の Wiener 核間の結合を与えるものである。これらのベクトル、行列を用い、階層方程式は以下のように表現できる。

$$n = 0$$

$$J(\lambda_0) A_0(\lambda_0) + J_0(\lambda_0) N(\lambda_0) = \int P(-\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1) A_1(\lambda_1|\lambda_0) d\lambda_1 \quad (3.47)$$

$$n = 1$$

$$J(\lambda_0 + \lambda_1) A_1(\lambda_1|\lambda_0) \quad (3.48)$$

$$= P(\lambda_1|\lambda_0) A_0(\lambda_0) + P_0(\lambda_1|\lambda_0) N(\lambda_0) + 2 \int P(-\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) d\lambda_2$$

$$n = 2$$

$$J(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} P(\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1) A_1(\lambda_1|\lambda_0) + \frac{1}{2} P(\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_2) A_1(\lambda_2|\lambda_0) \\
&\quad + 3 \int P(-\lambda_3|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0) d\lambda_3 \\
&\quad n = 3, 4, 5, \dots \\
&\quad J(\lambda_0 + \dots + \lambda_n) A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(\lambda_i|\lambda_0 + \dots + \lambda_n) A_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \\
&\quad + (n+1) \int P(-\lambda_{n+1}|\lambda_0 + \dots + \lambda_{n+1}) A_{n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}|\lambda_0) d\lambda_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

さらに、各行列を成分表示すると以下になる。

$$J(\lambda_0) = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \sqrt{\mu_2 i} \sin[S_2(\lambda_0)a] & 0 \\ 0 & \frac{S_1(\lambda_0)}{k_1} \sqrt{\mu_1} & 0 & -\frac{S_2(\lambda_0)}{k_2} \sqrt{\mu_2 i} \sin[S_2(\lambda_0)a] \\ 0 & -\sqrt{\epsilon_1} & 0 & \sqrt{\epsilon_2} \cos[S_2(\lambda_0)a] \\ \frac{S_1(\lambda_0)}{k_1} \sqrt{\epsilon_1} & 0 & \frac{S_2(\lambda_0)}{k_2} \sqrt{\epsilon_2} \cos[S_2(\lambda_0)a] & 0 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$J_0(\lambda_0) = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{S_1(\lambda_0)}{k_1} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\epsilon_1} & 0 & 0 \\ -\frac{S_1(\lambda_0)}{k_1} \sqrt{\epsilon_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

$$P(\lambda_1|\lambda_0) = -iF(\lambda_1) \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} S_1(\lambda_0) \cos \phi_{0,0+1} & \sqrt{\mu_1} k_1 \sin \phi_{0,0+1} \\ -\sqrt{\mu_1} S_1(\lambda_0) \sin \phi_{0,0+1} & \sqrt{\mu_1} k_1 \Lambda_{0,0+1}^1 \\ \sqrt{\epsilon_1} k_1 \sin \phi_{0,0+1} & -\sqrt{\epsilon_1} S_1(\lambda_0) \cos \phi_{0,0+1} \\ \sqrt{\epsilon_1} k_1 \Lambda_{0,0+1}^1 & \sqrt{\epsilon_1} S_1(\lambda_0) \sin \phi_{0,0+1} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\mu_2} S_2(\lambda_0) \cos \phi_{0,0+1} \cos[S_2(\lambda_0)a] & -\sqrt{\mu_2} k_2 \sin \phi_{0,0+1} \cos[S_2(\lambda_0)a] \\ -\sqrt{\mu_2} S_2(\lambda_0) \sin \phi_{0,0+1} \cos[S_2(\lambda_0)a] & -\sqrt{\mu_2} k_2 \Lambda_{0,0+1}^2 \cos[S_2(\lambda_0)a] \\ \sqrt{\epsilon_2} k_2 \sin \phi_{0,0+1} i \sin[S_2(\lambda_0)a] & \sqrt{\epsilon_2} S_2(\lambda_0) \cos \phi_{0,0+1} i \sin[S_2(\lambda_0)a] \\ \sqrt{\epsilon_2} k_2 \Lambda_{0,0+1}^2 i \sin[S_2(\lambda_0)a] & -\sqrt{\epsilon_2} S_2(\lambda_0) \sin \phi_{0,0+1} i \sin[S_2(\lambda_0)a] \end{bmatrix}$$

$$P_0(\lambda_1|\lambda_0) = -iF(\lambda_1) \begin{bmatrix} -\sqrt{\mu_1} S_1(\lambda_0) \cos \phi_{0,0+1} & \sqrt{\mu_1} k_1 \sin \phi_{0,0+1} & 0 & 0 \\ \sqrt{\mu_1} S_1(\lambda_0) \sin \phi_{0,0+1} & \sqrt{\mu_1} k_1 \Lambda_{0,0+1}^1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\epsilon_1} k_1 \sin \phi_{0,0+1} & \sqrt{\epsilon_1} S_1(\lambda_0) \cos \phi_{0,0+1} & 0 & 0 \\ \sqrt{\epsilon_1} k_1 \Lambda_{0,0+1}^1 & -\sqrt{\epsilon_1} S_1(\lambda_0) \sin \phi_{0,0+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

$$\Lambda_{0,0+1}^i \equiv (k_i^2 \cos \phi_{0,0+1} - |\lambda_0||\lambda_0 + \lambda_1|)/k_i^2, \quad \phi_{0,0+1} \text{ と } \lambda_0 + \lambda_1 \text{ のなす角} \tag{3.55}$$



行列形式の方程式の第1行は電界の $e_H$ 成分、第2行は磁界の $e_H$ 成分、第3行は電界の $e_{Vxy}$ 成分、第4行は磁界の $e_{Vxy}$ 成分に関するものである。さらに、以下のような行列

$$P[\lambda_1|\lambda_0] \equiv J^{-1}(\lambda_0 + \lambda_1)P(\lambda_1|\lambda_0) \quad (3.56)$$

$$P_0[\lambda_1|\lambda_0] \equiv J^{-1}(\lambda_0 + \lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_0) \quad (3.57)$$

$$I_0[\lambda_0] \equiv J^{-1}(\lambda_0)J_0(\lambda_0) \quad (3.58)$$

を定義すると、(3.47) (3.50) は

$$\begin{aligned} n=0 \\ A_0(\lambda_0) = -I_0[\lambda_0]N(\lambda_0) + \int P[-\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1]A_1(\lambda_1|\lambda_0)d\lambda_1 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} n=1 \\ A_1(\lambda_1|\lambda_0) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} = P[\lambda_1|\lambda_0]A_0(\lambda_0) + P_0[\lambda_1|\lambda_0]N(\lambda_0) + 2 \int P[-\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2]A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0)d\lambda_2 \\ n=2 \\ A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2}P[\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1]A_1(\lambda_1|\lambda_0) + \frac{1}{2}P[\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_2]A_1(\lambda_2|\lambda_0) \\ + 3 \int P[-\lambda_3|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0)d\lambda_3 \\ n=3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \quad (3.62) \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P[\lambda_i|\lambda_0 + \dots + \lambda_n]A_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \\ + (n+1) \int P[-\lambda_{n+1}|\lambda_0 + \dots + \lambda_{n+1}]A_{n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}|\lambda_0)d\lambda_{n+1} \end{aligned}$$

となる。ここで、(3.59)–(3.62) は完全導体表面による散乱での階層方程式のベクトル Wiener 核表現 (2.167)–(2.169) とほぼ同様の形式であることを指摘しておく<sup>1</sup>。さらに、各行列を成分表示すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} P[\lambda_1|\lambda_0] &= J^{-1}(\lambda_0 + \lambda_1)P(\lambda_0|\lambda_1) \\ &= -iF(\lambda_1) \begin{bmatrix} U_{12}^H(\lambda_1|\lambda_0) & V_{12}^H(\lambda_1|\lambda_0) & U_{22}^H(\lambda_1|\lambda_0) & -V_{22}^H(\lambda_1|\lambda_0) \\ V_{12}^V(\lambda_1|\lambda_0) & -U_{12}^V(\lambda_1|\lambda_0) & V_{22}^V(\lambda_1|\lambda_0) & -U_{22}^V(\lambda_1|\lambda_0) \\ -U_{11}^H(\lambda_1|\lambda_0) & -V_{11}^H(\lambda_1|\lambda_0) & -U_{21}^H(\lambda_1|\lambda_0) & V_{21}^H(\lambda_1|\lambda_0) \\ V_{11}^V(\lambda_1|\lambda_0) & -U_{11}^V(\lambda_1|\lambda_0) & V_{21}^V(\lambda_1|\lambda_0) & -U_{21}^V(\lambda_1|\lambda_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>各ベクトル成分に対応する物理量は異なる。(3.59)–(3.62)ではベクトル Wiener 核は各成分が空気線、誘電体側の偏波成分ごとの電界からなる4次元ベクトルであり、一方、(2.167)–(2.169)では電界の $x, y$ 成分を意味する2次元ベクトルである。

(3.63)

$$\begin{aligned}
P_0[\lambda_1|\lambda_0] &= J^{-1}(\lambda_0 + \lambda_1)P_0(\lambda_0|\lambda_1) \\
&= -iF(\lambda_1) \begin{bmatrix} U_{12}^{H*}(\lambda_1|\lambda_0) & -V_{12}^{H*}(\lambda_1|\lambda_0) & 0 & 0 \\ V_{12}^{V*}(\lambda_1|\lambda_0) & U_{12}^{V*}(\lambda_1|\lambda_0) & 0 & 0 \\ -U_{11}^{H*}(\lambda_1|\lambda_0) & V_{11}^{H*}(\lambda_1|\lambda_0) & 0 & 0 \\ V_{11}^{V*}(\lambda_1|\lambda_0) & U_{11}^{V*}(\lambda_1|\lambda_0) & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (3.64)$$

ここで、

$$U_{ij}^k(\lambda_1|\lambda_0) \equiv U_{ij}(\lambda_1|\lambda_0) \cdot a_{ij}^k(\lambda_1|\lambda_0) \frac{1}{\Delta^k(\lambda_0 + \lambda_1)} \quad (3.65)$$

$$V_{ij}^k(\lambda_1|\lambda_0) \equiv V_{ij}(\lambda_1|\lambda_0) \cdot a_{ij}^k(\lambda_1|\lambda_0) \frac{1}{\Delta^k(\lambda_0 + \lambda_1)} \quad (3.66)$$

$$U_{ij}^{k*}(\lambda_1|\lambda_0) \equiv U_{ij}(\lambda_1|\lambda_0) \cdot a_{ij}^{k*}(\lambda_1|\lambda_0) \frac{1}{\Delta^k(\lambda_0 + \lambda_1)} \quad (3.67)$$

$$V_{ij}^{k*}(\lambda_1|\lambda_0) \equiv V_{ij}(\lambda_1|\lambda_0) \cdot a_{ij}^{k*}(\lambda_1|\lambda_0) \frac{1}{\Delta^k(\lambda_0 + \lambda_1)} \quad (3.68)$$

$$i, j = \begin{cases} 1 & \text{air} \\ 2 & \text{dielectric} \end{cases}, \quad k = \begin{cases} H & \text{TE} \\ V & \text{TM} \end{cases}$$

$$U_{ij}(\lambda_1|\lambda_0) \equiv \frac{1}{k_j} \left[ \frac{S_i(\lambda_0)S_j(\lambda_0 + \lambda_1) \cos \phi_{0,0+1}}{k_i k_j A_{0,0+1}^i} \right], \quad V_{ij}(\lambda_1|\lambda_0) \equiv \frac{1}{k_j} \left[ \frac{k_i S_j(\lambda_0 + \lambda_1) \sin \phi_{0,0+1}}{S_i(\lambda_0)k_j \sin \phi_{0,0+1}} \right] \quad (3.69)$$

$$a_{ij}^{H*}(\lambda_1|\lambda_0) \equiv \left[ \frac{\xi_i(\lambda_0)\xi_j(\lambda_0 + \lambda_1)\sqrt{\epsilon_j\mu_i}}{-\eta_i(\lambda_0)\eta_j(\lambda_0 + \lambda_1)\sqrt{\epsilon_i\mu_j}} \right], \quad a_{ij}^{V*}(\lambda_1|\lambda_0) \equiv \left[ \frac{\eta_i(\lambda_0)\eta_j(\lambda_0 + \lambda_1)\sqrt{\epsilon_i\mu_j}}{-\xi_i(\lambda_0)\xi_j(\lambda_0 + \lambda_1)\sqrt{\epsilon_j\mu_i}} \right] \quad (3.70)$$

$$a_{ij}^{H*}(\lambda_1|\lambda_0) \equiv \left[ \frac{-\xi_i(\lambda_0)\xi_j(\lambda_0 + \lambda_1)\sqrt{\epsilon_j\mu_i}}{-\eta_i(\lambda_0)\eta_j(\lambda_0 + \lambda_1)\sqrt{\epsilon_i\mu_j}} \right], \quad a_{ij}^{V*}(\lambda_1|\lambda_0) \equiv \left[ \frac{\eta_i(\lambda_0)\eta_j(\lambda_0 + \lambda_1)\sqrt{\epsilon_i\mu_j}}{\xi_i(\lambda_0)\xi_j(\lambda_0 + \lambda_1)\sqrt{\epsilon_j\mu_i}} \right] \quad (3.71)$$

$$\xi(\lambda) \equiv \begin{cases} \cos[S_2(\lambda)a] & i = 2 \\ 1 & i = 1 \end{cases} \quad (3.72)$$

$$\eta(\lambda) \equiv \begin{cases} i \sin[S_2(\lambda)a] & i = 2 \\ 1 & i = 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

$$\Delta^H(\lambda) \equiv \frac{S_2(\lambda)}{k_2} \sqrt{\epsilon_2\mu_1} \cos[S_2(\lambda)a] - \frac{S_1(\lambda)}{k_1} \sqrt{\epsilon_1\mu_2} \sin[S_2(\lambda)a] \quad (3.74)$$

$$\Delta^V(\lambda) \equiv \frac{S_1(\lambda)}{k_1} \sqrt{\epsilon_2\mu_1} \cos[S_2(\lambda)a] - \frac{S_2(\lambda)}{k_2} \sqrt{\epsilon_1\mu_2} \sin[S_2(\lambda)a] \quad (3.75)$$

## 3.2.3 積分方程式の0次近似

階層方程式は積分方程式であるので厳密解を得ることはできないが、完全導体表面の場合と同様に表面粗さが小さいという条件を用いて、低次の Wiener 核から順に近似的に求められる (2.2節参照)。

$$A_0(\lambda_0) = -I_0^*(\lambda_0)N(\lambda_0) \quad (3.76)$$

$$A_1(\lambda_1|\lambda_0) = P^*[\lambda_1|\lambda_0]A_0(\lambda_0) + P_0^*[\lambda_1|\lambda_0]N_0(\lambda_0) \quad (3.77)$$

$$A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) = \frac{1}{2}P^*[\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1]A_1(\lambda_1|\lambda_0) + \frac{1}{2}P^*[\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_2]A_1(\lambda_2|\lambda_0) \quad (3.78)$$

$$P^*[\lambda_1|\lambda_0] \equiv C(\lambda_0 + \lambda_1)P[\lambda_1|\lambda_0] \quad (3.79)$$

$$P_0^*[\lambda_1|\lambda_0] \equiv C(\lambda_0 + \lambda_1)P_0[\lambda_1|\lambda_0] \quad (3.80)$$

$$I_0^*(\lambda_0) \equiv C(\lambda_0)[I_0(\lambda_0) - \Gamma_0(\lambda_0)] \quad (3.81)$$

$$C(\lambda_0) \equiv [I - \Gamma(\lambda_0)]^{-1} \quad (3.82)$$

$$\Gamma(\lambda_0) \equiv \int P[-\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1]C(\lambda_0 + \lambda_1)P[\lambda_1|\lambda_0]d\lambda_1 \quad (3.83)$$

$$\Gamma_0(\lambda_0) \equiv \int P[-\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1]C(\lambda_0 + \lambda_1)P_0[\lambda_1|\lambda_0]d\lambda_1 \quad (3.84)$$

## 3.2.4 近似解

第2章で述べたように  $\Gamma, \Gamma_0$  は多重散乱の効果を表すものであり、不規則表面のもつモードによる発散の困難を解消するものである。この章で取り扱っている誘電体導波路の場合も導波モードが存在するので、 $\Gamma, \Gamma_0$  によって解の発散が抑えられ、有限解が得られる。しかし、ここでは数値計算を容易にするために (3.76)-(3.84) において  $\Gamma = \Gamma_0 = 0$  と近似し、誘電体層がわずかな損失をもつと仮定して有限解を得る。0次、1次、2次の Wiener 核を成分表示すると以下になる。本章では以後  $k_1 = 1, \mu_1 = \mu_2, n = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$  とし、 $\Delta^H, \Delta^V$  は

$$\Delta^H(\lambda) = S_2(\lambda) \cos[S_2(\lambda)a] - S_1(\lambda) i \sin[S_2(\lambda)a] \quad (3.85)$$

$$\Delta^V(\lambda) = nS_1(\lambda) \cos[S_2(\lambda)a] - n^{-1}S_2(\lambda) i \sin[S_2(\lambda)a] \quad (3.86)$$

とする。

## 0次 Wiener 核

$$\begin{bmatrix} A_0^H(\lambda_0) \\ A_0^V(\lambda_0) \\ 2C_0^H(\lambda_0) \\ 2C_0^V(\lambda_0) \end{bmatrix} = A_0(\lambda_0) = -I_0[\lambda_0]N(\lambda_0) = -J^{-1}(\lambda_0)J_0(\lambda_0)N(\lambda_0)$$

$$= \begin{bmatrix} -\{S_2(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a] + S_1(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]\} N^H(\lambda_0) \frac{1}{\Delta^H(\lambda_0)} \\ \{nS_1(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a] + n^{-1}S_2(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]\} N^V(\lambda_0) \frac{1}{\Delta^V(\lambda_0)} \\ 2S_1(\lambda_0)N^H(\lambda_0) \frac{1}{\Delta^H(\lambda_0)} \\ 2S_1(\lambda_0)N^V(\lambda_0) \frac{1}{\Delta^V(\lambda_0)} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

## 1 次 Wiener 核

$$A_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = -i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] 2C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \quad (3.88)$$

$$A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = n \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] 2C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) \\ + n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] 2C_1^{VI}(\lambda_1|\lambda_0) \quad (3.89)$$

$$2C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1)} (\alpha \cos \phi_{0,0+1} - \beta \sin \phi_{0,0+1}) \quad (3.90)$$

$$2C_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = 2C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) + S_1(\lambda_0 + \lambda_1) 2C_1^{VI}(\lambda_1|\lambda_0) \quad (3.91)$$

$$2C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \gamma \quad (3.92)$$

$$2C_1^{VI}(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} (\alpha \sin \phi_{0,0+1} + \beta \cos \phi_{0,0+1}) \quad (3.93)$$

$$\alpha = (n^2 - 1) \frac{2S_1(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]}{\Delta^H(\lambda_0)} N^H(\lambda_0) \quad (3.94)$$

$$\beta = (n^2 - 1) \frac{2S_1(\lambda_0)S_2(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]}{n\Delta^V(\lambda_0)} N^V(\lambda_0) \quad (3.95)$$

$$\gamma = -|\lambda_0||\lambda_0 + \lambda_1|(n^2 - 1) \frac{2S_1(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a]}{n\Delta^V(\lambda_0)} N^V(\lambda_0) \quad (3.96)$$

## 2 次 Wiener 核

$$\begin{aligned} & A_2^H(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\ &= \frac{iF(\lambda_2)}{2\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} [i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a] \\ & \times \{(n^2 - 1)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] 2C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} \\ & + [n\zeta(\lambda_0 + \lambda_1) 2C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) \\ & + (n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_1)S_2(\lambda_0 + \lambda_1)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] 2C_1^{VI}(\lambda_1|\lambda_0)] \sin \phi_{0+1,0+1+2}\} \\ & + S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a] \\ & \times \{\eta(\lambda_0 + \lambda_1) 2C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} + \xi(\lambda_0 + \lambda_1) 2C_1^{VI}(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{iF(\lambda_1)}{2\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \{i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a] \\
& \times \left\{ (n^2 - 1)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_2)a] 2C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1.0+1+2} \right. \\
& + [n\zeta(\lambda_0 + \lambda_2) 2C_1^{V\perp}(\lambda_2|\lambda_0) \\
& + (n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_2)S_2(\lambda_0 + \lambda_2)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_2)a] 2C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0)] \sin \phi_{0+1.0+1+2} \} \\
& + S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a] \\
& \times \left. \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_2) 2C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1.0+1+2} + \xi(\lambda_0 + \lambda_2) 2C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1.0+1+2} \right\} \right\} \\
& \quad \quad \quad (3.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_2^V(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\
= & - \frac{iF(\lambda_2)}{2\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \{n \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a] \\
& \times \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_1) 2C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1.0+1+2} - \xi(\lambda_0 + \lambda_1) 2C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1.0+1+2} \right. \\
& + [n^{-1}\zeta(\lambda_0 + \lambda_1) 2C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \\
& \quad \quad \quad \left. - (n - 1/n) \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] 2C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0)] |\lambda_0 + \lambda_1| |\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2| \} \right\} \\
& + n^{-1} S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a] \\
& \times \left\{ (n^2 - 1)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] 2C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1.0+1+2} \right. \\
& + \left. \left\{ (n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_1)S_2(\lambda_0 + \lambda_1)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] 2C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. - n\zeta(\lambda_0 + \lambda_1) 2C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) \right\} \cos \phi_{0+1.0+1+2} \right\} \} \\
- & \frac{iF(\lambda_1)}{2\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \{n \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a] \\
& \times \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_2) 2C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1.0+1+2} - \xi(\lambda_0 + \lambda_2) 2C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1.0+1+2} \right. \\
& + [n^{-1}\zeta(\lambda_0 + \lambda_2) 2C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) \\
& \quad \quad \quad \left. - (n - 1/n) \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_2)a] 2C_1^{V\perp}(\lambda_2|\lambda_0)] |\lambda_0 + \lambda_2| |\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2| \} \right\} \\
& + n^{-1} S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a] \\
& \times \left\{ (n^2 - 1)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_2)a] 2C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1.0+1+2} \right. \\
& + \left. \left\{ (n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_2)S_2(\lambda_0 + \lambda_2)i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_2)a] 2C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. - n\zeta(\lambda_0 + \lambda_2) 2C_1^{V\perp}(\lambda_2|\lambda_0) \right\} \cos \phi_{0+1.0+1+2} \right\} \} \\
& \quad \quad \quad (3.98)
\end{aligned}$$

$$\zeta(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv S_1(\lambda_0 + \lambda_1) \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] - S_2(\lambda_0 + \lambda_1) i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] \quad (3.99)$$

$$\eta(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv S_1(\lambda_0 + \lambda_1) i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] - S_2(\lambda_0 + \lambda_1) \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] \quad (3.100)$$

$$\xi(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv n S_1(\lambda_0 + \lambda_1) \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] - n^{-1} S_2(\lambda_0 + \lambda_1) i \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] \quad (3.101)$$

## 3.3 コヒーレント散乱—無振動解—

$\Gamma = \Gamma_0 = 0$  とした場合には 0 次 Wiener 核は無振動解を表す。以下のように空気と誘電体層の境界が平坦である場合について、反射係数  $R_0$  と透過係数  $T_0$  が 0 次 Wiener 核で定義できる。

TE wave

$$\begin{aligned} R_0^H(\lambda_0) &\equiv \frac{A_0^H(\lambda_0)}{N^H(\lambda_0)} \\ &= \frac{S_2(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a] + S_1(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]}{S_2(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a] - S_1(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]} \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} T_0^H(\lambda_0) &\equiv \frac{C_0^H(\lambda_0)}{N^H(\lambda_0)} \\ &= \frac{S_1(\lambda_0)}{S_2(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a] - S_1(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]} \end{aligned} \quad (3.103)$$

TM wave

$$\begin{aligned} R_0^V(\lambda_0) &\equiv \frac{A_0^V(\lambda_0)}{N^V(\lambda_0)} \\ &= \frac{nS_1(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a] + n^{-1}S_2(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]}{nS_1(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a] - n^{-1}S_2(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]} \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} T_0^V(\lambda_0) &\equiv \frac{C_0^V(\lambda_0)}{N^V(\lambda_0)} \\ &= \frac{S_1(\lambda_0)}{nS_1(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0)a] - n^{-1}S_2(\lambda_0)i \sin[S_2(\lambda_0)a]} \end{aligned} \quad (3.105)$$

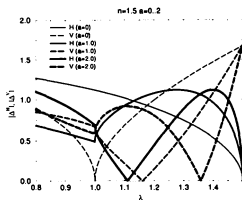
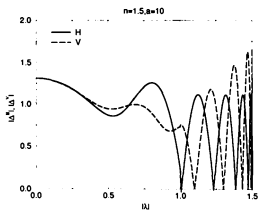
また、

$$\Delta^H(\lambda) = S_2(\lambda) \cos[S_2(\lambda)a] - S_1(\lambda)i \sin[S_2(\lambda)a] = 0 \quad (3.106)$$

$$\Delta^V(\lambda) = nS_1(\lambda) \cos[S_2(\lambda)a] - n^{-1}S_2(\lambda)i \sin[S_2(\lambda)a] = 0 \quad (3.107)$$

の解は誘電体層による導波モードを意味し、 $k_1 < |\lambda| < k_2$  の範囲のみに存在する。これは導波モードが空気側ではエバネセントで誘電体層では伝搬可能な場合にのみ存在することを意味する。

TE 偏波導波モード、すなわち  $\Delta^H(\lambda) = 0$  の解の個数は  $U < \pi/2$  の場合 0、 $(2m-1)\pi/2 \leq U < (2m+1)\pi/2$  の場合は  $(m: \text{整数})$  となる。ただし  $U = \sqrt{n^2-1}k_1a$  である。また、TM 偏波導波モード、すなわち  $\Delta^V(\lambda) = 0$  の解の個数は  $0 \leq U < \pi$  の場合 1、 $(m-1)\pi \leq U < m\pi$  の場合  $m$  となり、誘電体層の厚さが大きくなるほどモードの個数も大きくなることが分かる。なお、 $\lambda = k_2$  は誘電体の厚さによらず TE 偏波モード方程式の解であるが、 $\lambda = k_2$  のとき電磁界の TE 偏波成分は零となるのでモードを表すものではない(図 3.4, 3.5 参照)。

図 3.4:  $|\Delta^H|, |\Delta^V|$  と  $|\lambda|$  の関係 ( $a = 0, 1.0, 2.0$ ;  $n = 1.5$ )図 3.5:  $|\Delta^H|, |\Delta^V|$  と  $|\lambda|$  の関係 ( $a = 10.0$ ;  $n = 1.5$ )

## 3.4 1次インコヒーレント散乱

$A_I^H$  と  $A_I^V$  を用いて、誘電体層の屈折率  $n = 1.64 + 0.00239i$  の場合の1次のインコヒーレント散乱分布を数値計算した結果を図 3.6-3.13 に示した。

## 3.4.1 散乱光干渉

誘電体層が薄い場合、散乱分布に干渉縞がみられることが分かる。暗線はTM-TM 散乱(TM 偏波入射による散乱波のTM 偏波成分) の場合を除いて

$$S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a = m\pi \quad (m: \text{整数}) \quad (3.108)$$

の方向にみられる(図 3.8-3.9-3.12-3.13 参照)。この現象は I. Newton [1] によって発見された散乱光干渉の一種であると考えられる。

図 3.14 に示すように入射波が点  $P$  で散乱されたとすると、金属表面に対しての鏡像散乱点  $Q$  が誘起される。金属表面での反射時に位相が $\pi$ ずれるとすると、 $P$ からの散乱波と  $Q$ からの散乱波との間の位相差は散乱方向を $\theta$ とすると

$$\delta = 2na \cos \theta' + \pi = S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a + \pi \quad (3.109)$$

となる。 $\delta = (2m+1)\pi$ となる方向、つまり(3.108)の方向で2つの散乱波は打ち消し合い、暗線が生じる。しかし、TM-TM 散乱ではこのような解釈は不可能である。さらに、議論をすすめるために(3.88),(3.89)を以下のように表現する。

$$A_I^H(\lambda_1|\lambda_0) \quad (3.110)$$

$$= C_H \frac{|e_H[\lambda_0 + \lambda_1]|}{\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1)} \left( \frac{|e_H[\lambda_0]|}{\Delta^H(\lambda_0)} \cos \phi_{0,0+1} N^H(\lambda_0) - \frac{|e_{Vxy}[\lambda_0]|}{\Delta^V(\lambda_0)} \sin \phi_{0,0+1} N^V(\lambda_0) \right)$$

$$A_I^V(\lambda_1|\lambda_0)$$

$$= C_V \frac{|e_V[\lambda_0 + \lambda_1]|}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \frac{|e_V[\lambda_0]|}{\Delta^V(\lambda_0)} N^V(\lambda_0) \quad (3.111)$$

$$- C_H \frac{|e_{Vxy}[\lambda_0 + \lambda_1]|}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \left( \frac{|e_H[\lambda_0]|}{\Delta^H(\lambda_0)} \sin \phi_{0,0+1} N^H(\lambda_0) + \frac{|e_{Vxy}[\lambda_0]|}{\Delta^V(\lambda_0)} \cos \phi_{0,0+1} N^V(\lambda_0) \right)$$

$$C_H = -2iF(\lambda_1)(n^2 - 1)S_1(\lambda_0) \sin[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] \sin[S_2(\lambda_0)a] \quad (3.112)$$

$$C_V = 2iF(\lambda_1)n^2(n^2 - 1)S_1(\lambda_0) \cos[S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a] \cos[S_2(\lambda_0)a] \quad (3.113)$$

TE 偏波散乱波(3.110)とTM 偏波散乱波(3.111)の第2項は電界の $xy$ 平面成分による散乱を意味するので水平散乱と呼ぶ。また、TM 偏波散乱波の第1項を垂直散乱と呼ぶ。(3.110)-(3.113)より、水平散乱、垂直散乱の暗線は

$$S_2(\lambda_0 + \lambda_1)a = na \cos \theta' = \begin{cases} m\pi & \text{水平散乱} \\ (m + 1/2)\pi & \text{垂直散乱} \end{cases} \quad m: \text{整数} \quad (3.114)$$



となる。TM 偏波散乱波の暗線の天頂角 $\theta$ は方位角 $\phi$ に依存するが、これはTE 偏波が水平成分 $e_H$ のみからなるのに対して、TM 偏波は水平成分 $e_{V,H}$ 、垂直成分 $e_{V,V}$ の両成分をもち、水平散乱と垂直散乱の重ね合わせとなるからである。

これらの干渉縞は

$$a(n - \sqrt{n^2 - 1}) > \pi \quad (3.115)$$

をみたすような厚い誘電体層からの散乱でみられるが、これは(3.114)の左辺の値域の大きさが $\pi$ より大きい場合に(3.114)が解をもつことによる。また、誘電体層の厚さ $a$ が小さい場合でも

$$na > m\pi > \sqrt{n^2 - 1}a \quad \text{水平散乱} \quad (3.116)$$

$$na > (m + 1/2)\pi > \sqrt{n^2 - 1}a \quad \text{垂直散乱} \quad (3.117)$$

という条件が成立すれば(3.114)は解をもつ。なお、これらの干渉縞は2次散乱でははっきりしなくなる(図3.19参照)。

### 3.4.2 相反定理

1次 Wiener 核 (3.110), (3.111) は以下のような関係をみたす。

$$\frac{A_1^{HH}(\lambda_1|\lambda_0)}{S_1(\lambda_0)} = \frac{A_1^{HH}(\lambda_1|-\lambda_0-\lambda_1)}{S_1(-\lambda_0-\lambda_1)} \quad (3.118)$$

$$\frac{A_1^{HV}(\lambda_1|\lambda_0)}{S_1(\lambda_0)} = \frac{A_1^{VH}(\lambda_1|-\lambda_0-\lambda_1)}{S_1(-\lambda_0-\lambda_1)} \quad (3.119)$$

$$\frac{A_1^{VV}(\lambda_1|\lambda_0)}{S_1(\lambda_0)} = \frac{A_1^{VV}(\lambda_1|-\lambda_0-\lambda_1)}{S_1(-\lambda_0-\lambda_1)} \quad (3.120)$$

ここで $A_1^{HH}$ ,  $A_1^{HV}$ ,  $A_1^{VH}$ ,  $A_1^{VV}$  はそれぞれTE→TE 散乱、TE→TM 散乱、TM→TE 散乱、TM→TM 散乱を意味する(例えば $A_1^{HH}$ はTE 偏波入射:  $N^H = 1, N^V = 0$  の場合の $A_1^H$ である)。入射波ベクトル $\lambda_0$ に対する散乱波ベクトルは $\lambda_0 + \lambda_1$ であるので、 $-\lambda_0 - \lambda_1$ は散乱波の進行方向を反転させたものに相当する。つまり、(3.118)–(3.120)は1次散乱における相反定理を表しており、散乱が時間反転対称性をもつことを意味する[68]。特に、(3.119)は交差偏波散乱における相反性を表している(2.1.7節参照)。また、入射波ベクトル $\lambda_0$ が

$$S_2(\lambda_0)a = na \cos \theta'_0 = \begin{cases} m\pi & \text{水平散乱} \\ (m + 1/2)\pi & \text{垂直散乱} \end{cases} \quad m: \text{整数} \quad (3.121)$$

をみたすときには、(3.112), (3.113)より、1次の水平散乱、または、垂直散乱が起きないということがわかる。すなわち、(3.114)で表される暗線からの入射は1次散乱を生じさせないということであるが、これは、相反定理によれば当然の帰結である。

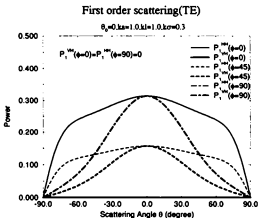


図 3.6: 1次散乱分布 ( $P_1^H, P_1^V$ )、入射角 $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 1.0$

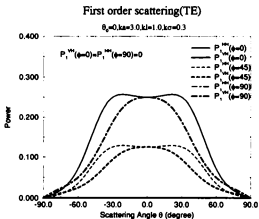


図 3.7: 1次散乱分布 ( $P_1^H, P_1^V$ )、入射角 $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 3.0$

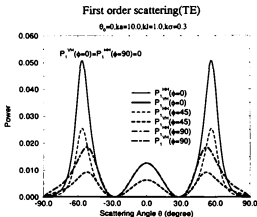


図 3.8: 1 次散乱分布 ( $P_1^H, P_1^V$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 10.0$

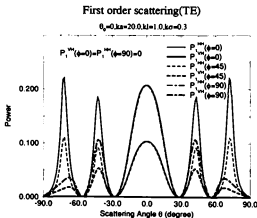


図 3.9: 1 次散乱分布 ( $P_1^H, P_1^V$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 20.0$

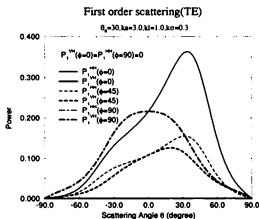


図 3.10: 1次散乱分布 ( $P_I^H, P_I^V$ )、入射角 $\theta_0 = 30^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 3.0$

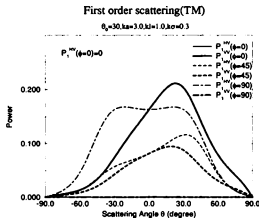


図 3.11: 1次散乱分布 ( $P_I^H, P_I^V$ )、入射角 $\theta_0 = 30^\circ$ 、TM 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 3.0$

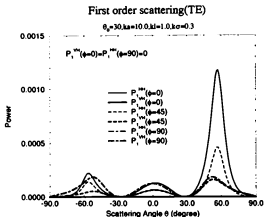


図 3.12: 1 次散乱分布 ( $P_1^H, P_1^V$ )、入射角  $\theta_0 = 30^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 10.0$

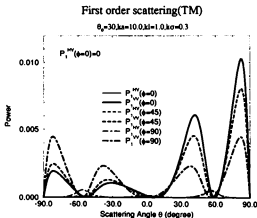


図 3.13: 1 次散乱分布 ( $P_1^H, P_1^V$ )、入射角  $\theta_0 = 30^\circ$ 、TM 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 10.0$

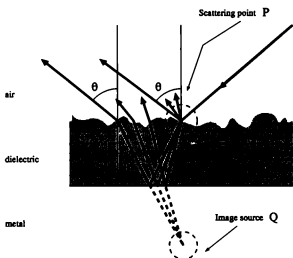


図 3.14: 散乱光干渉。ある散乱点からの散乱波がその散乱点の鏡像からの散乱波と干渉する。

### 3.5 2次インコヒーレント散乱

$A_2^H$  と  $A_2^V$  を用いて、2次のインコヒーレント散乱分布を数値計算した結果を図 3.15-3.19 に示した。

#### 3.5.1 後方強調散乱

2次 Wiener 核  $A_2^H, A_2^V$  は2つの2回散乱過程からなる(図 3.20 参照)。一方は入射波  $\lambda_0$  が中間状態  $\lambda_l (= \lambda_0 + \lambda_1)$  へ散乱され、さらに2度目の散乱により最終的に散乱波  $\lambda (= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)$  となる2回散乱過程であり、もう一方は中間状態が  $\lambda_r (= \lambda_0 + \lambda_2)$  である散乱過程を意味する。したがって、強調散乱はこれらの二つの散乱過程間の干渉によって生じるものであるといえる。図 3.15-3.19 に示した2次インコヒーレント散乱分布  $P_2^H, P_2^V$  に後方強調散乱が共偏波、交差偏波の両成分にみられることがわかる。さらに、誘電体層が薄く TE 偏波モードが存在せず、ただ1つの TM 偏波モードのみが伝搬できるような場合でも、TE 偏波入射時でも後方強調散乱がみられるが(図 3.15)、これは1次元不規則表面の場合とは全く異なる結果である。2次元不規則表面の場合、散乱により偏波が変化する( $\phi_{0,0+1} \neq 0$  の場合)ので、モードの偏波と入射波の偏波が異なっている、導波モードが励起され、多重散乱過程間の干渉が生じ、後方強調散乱が存在する。

#### 3.5.2 随伴強調散乱

1次元不規則表面をもつ誘電体導波路による散乱では、導波路が複数のモードをもつ場合に後方強調散乱に加えて随伴強調散乱がみられることが知られている。後方強調散乱は同じモードを中間状態にもつ散乱過程同士の干渉により生じるが、随伴強調散乱は異なるモード間の干渉によるものである[6, 8]。しかし、2次元不規則表面の場合はモードが複数ある場合でも随伴強調散乱はみられない。これは中間状態が2次元的に広がっているためであるが、TE 偏波散乱波を例にとり以下で説明する。

(3.78) の第1行を (3.29) に代入すると

$$P_2^H(\theta|\theta_0) = 2!k_1^2\mu_1\cos^2\theta\int_{R_2}||A_2(\lambda-\lambda_0-\lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)||_1|^2d\lambda_2 \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} &= k_1^2\mu_1\cos^2\theta\int_{R_2}||P_2^*[\lambda-\lambda_l|\lambda_l]A_1(\lambda_l-\lambda_0|\lambda_0) \\ &\quad + P_2^*[\lambda-\lambda_r|\lambda_r]A_1(\lambda_r-\lambda_0|\lambda_0)||_1|^2d\lambda_l \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\lambda_l = \lambda - \lambda_2 \quad (3.124)$$

$$\lambda_r = \lambda_0 + \lambda_2 = \lambda_0 + \lambda - \lambda_l \quad (3.125)$$

が得られる。ここで  $||_1$  は行列の第1行を表す。 $P_2^H$  はすべての中間状態  $\lambda_l, \lambda_r$  を経由する散乱過程の総和であることが分かる。ここで、 $|\lambda_l|$  をあるモード(モード1)に一致する長さに固定し、角度方向に積分する場合を考える(図 3.21 参照)。 $|\lambda_r|$  がある角度(点A)で別のモード(モード2)に一致したとしても、 $|\lambda_r|$  が  $\lambda_l$  の角度に依存しているため  $\lambda_0 + \lambda \neq 0$  である限り、 $|\lambda_r|$  はモ-

ドから外れる。一方、後方散乱 ( $\lambda_0 + \lambda = 0$ ) の場合は  $|\lambda_r|$  は  $|\lambda_l|$  に等しく、角度に依存しない。したがって、異なるモード間の干渉は角度積分で打ち消され、同じモード間の干渉である後方強調散乱のみが存在する。



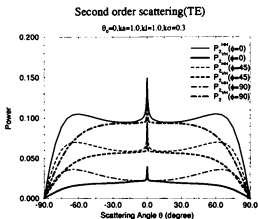


図 3.15: 2 次散乱分布 ( $P_2^H, P_2^Y$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 1.0$

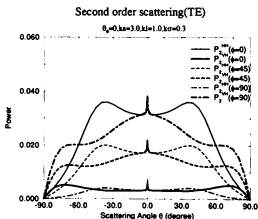


図 3.16: 2 次散乱分布 ( $P_2^H, P_2^Y$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 3.0$

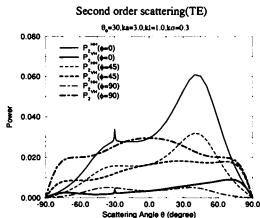


図 3.17: 2次散乱分布 ( $P_2^H, P_2^V$ )、入射角 $\theta_0 = 30^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 3.0$

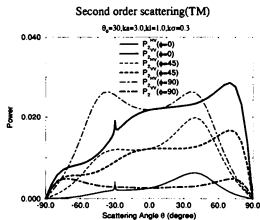


図 3.18: 2次散乱分布 ( $P_2^H, P_2^V$ )、入射角 $\theta_0 = 30^\circ$ 、TM 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 3.0$

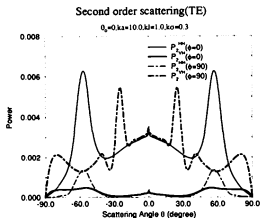


図 3.19: 2 次散乱分布 ( $P_z^{(H)}, P_z^{(V)}$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、誘電体層の厚さ  $ka = 10.0$

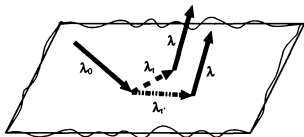
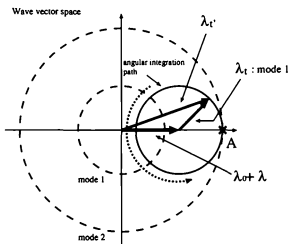


図 3.20: 2 次 Wiener 核によって表現される散乱過程。 $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_1$ ,  $\lambda_1' = \lambda_0 + \lambda_2 = \lambda_0 + \lambda - \lambda_0$



$$\lambda_{0+}\lambda = \lambda_t - \lambda_{t'}$$

図 3.21: 角度積分。中間状態 $\lambda_t$ をモード 1 に一致させ ( $|\lambda_t|$  を一定とし) 角度積分すると、後方散乱 ( $\lambda_0 + \lambda = 0$ ) でない限り、もう一つの間状態の大きさ  $|\lambda_{t'}|$  は変化し、モードに一致しつづけることはない。



## 第 4 章

# 不規則誘電体表面による散乱

誘電率の異なる 2 種類の媒質の境界面が不規則である場合の電磁波散乱を取り扱う。誘電率の大きい側から入射する場合と小さい側から入射する場合を考える。不規則表面は (2.1) で表されるものとする。本章では、平坦な誘電体境界における特徴的な角度である臨界角と Brewster 角に注目し、臨界角へ強い散乱が生じることや Brewster 角と対応のつく散乱の生じない方向 (散乱 Brewster 角) が存在することを示す。

4.1 節で解の形を定め、4.2 節で近似解を求める。4.3 節では平均波動場を示し、4.4 節では散乱分布の数値計算結果を示し、臨界角方向への散乱ピーク、散乱 Brewster 角等について議論する。

## 4.1 電磁場の表現

### 4.1.1 波動ベクトルと偏波ベクトル

入射側の媒質を媒質 1、透過側を媒質 2 とし、波動ベクトル  $k_i$  を

$$k_i = \lambda + \text{sign}([k_i]_z) S_i(\lambda) e_z \quad i = \begin{cases} 1 & \text{媒質 1 } z > f(x) \\ 2 & \text{媒質 2 } z < f(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$S_i(\lambda) = \sqrt{k_i^2 - \lambda^2}, \quad k_i = |k_i|, \quad \lambda = |\lambda|, \quad k_2/k_1 = n \quad (4.2)$$

とおく (3.1.1 節参照)。ここで  $n$  は媒質 2 の媒質 1 に対する相対屈折率を意味する。また、 $k_i$  に対応する TE (水平 または s) 偏波および TM (TM または p) 偏波ベクトル  $e_H(k_i)$ ,  $e_V(k_i)$  を (3.3)–(3.9) で定義する。

### 4.1.2 境界条件

不規則表面  $z = f(x)$  における境界条件は

$$n \times (E^1 - E^2) = 0, \quad n \times (H^1 - H^2) = 0 \quad \text{on } z = f(T^x \omega) \quad (4.3)$$

$$n = \frac{\nabla f - e_z}{(|\nabla f|^2 + 1)^{1/2}} \quad (4.4)$$

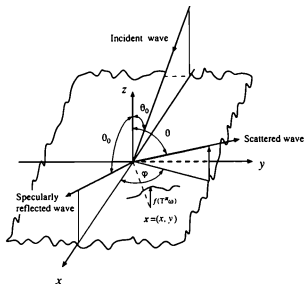


図 4.1: 誘電体表面による電磁波散乱の全体図

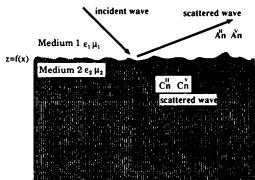


図 4.2: 不規則誘電体表面の断面図

と表現できる。ここで、 $E^1, H^1$  は媒質 1 内の、 $E^2, H^2$  は媒質 2 内の電場、磁場である。

#### 4.1.3 解の形

確率的 Floquet の定理による不規則散乱波の電界  $E'(x, z; \omega | \lambda_0)$  は Wiener Ito 展開により、以下のように表現できる (3.1.3 参照)。ここで、 $\lambda_0$  は入射方向を表す。

$$\begin{aligned}
 & [\text{媒質 1 内: } z > 0] \\
 E^1(x, z; \omega | \lambda_0) = & \{e_{||}^{(-)}[\lambda_0]N^H(\lambda_0) + e_V^{(-)}[\lambda_0]N^V(\lambda_0)\}e^{i\lambda_0 \cdot x - iS_1(\lambda_0)z} \\
 & + \{e_{||}^{(+)}[\lambda_0]A_0^H(\lambda_0) + e_V^{(+)}[\lambda_0]A_0^V(\lambda_0)\}e^{i\lambda_0 \cdot x + iS_1(\lambda_0)z} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \{e_{||}^{(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\
 & + e_V^{(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)\}e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot x + iS_1(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)z} \\
 & \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)]
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 & [\text{媒質 2 内: } z < 0] \\
 E^2(x, z; \omega | \lambda_0) = & e_{||}^{(-)}[\lambda_0]e^{i\lambda_0 \cdot x - iS_2(\lambda_0)z}C_0^H(\lambda_0) \\
 & + e_V^{(-)}[\lambda_0]e^{i\lambda_0 \cdot x - iS_2(\lambda_0)z}C_0^V(\lambda_0) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \{e_{||}^{(-)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot x - iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)z}C_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\
 & + e_V^{(-)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot x - iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)z}C_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)\} \\
 & \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

ここで  $N^H, N^V$  は入射波の TE 偏波成分、TM 偏波成分を表す。 $A_n^H, C_n^H$  は散乱波の TE 偏波成分を、 $A_n^V, C_n^V$  は TM 偏波成分を意味する。

散乱波の磁界  $H^i$  も同様に表現できる。

$$\begin{aligned}
 & [\text{媒質 1: } z > 0] \\
 H^1(x, z; \omega | \lambda_0) = & \left[ \{e_V^{(-)}[\lambda_0]N^H(\lambda_0) - e_{||}^{(-)}[\lambda_0]N^V(\lambda_0)\}e^{i\lambda_0 \cdot x - iS_1(\lambda_0)z} \right. \\
 & + \{e_V^{(+)}[\lambda_0]A_0^H(\lambda_0) - e_{||}^{(+)}[\lambda_0]A_0^V(\lambda_0)\}e^{i\lambda_0 \cdot x + iS_1(\lambda_0)z} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \{e_V^{(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\
 & - e_{||}^{(+)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n]A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)\}e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot x + iS_1(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)z}
 \end{aligned}$$



$$\times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \times \frac{1}{Z_1} \quad (4.7)$$

[媒質 2:  $z < 0$ ]

$$\begin{aligned} H^2(\mathbf{x}, z; \omega | \lambda_0) = & \left[ e_V^{2(-)}[\lambda_0] e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0)z} C_0^H(\lambda_0) \right. \\ & - e_H^{2(-)}[\lambda_0] e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0)z} C_0^V(\lambda_0) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \dots \int [e_V^{2(-)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n] e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)z} C_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ & - e_H^{2(-)}[\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n] e^{i(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)z} C_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)] \\ & \left. \times \hat{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \right] \times \frac{1}{Z_2} \quad (4.8) \end{aligned}$$

ここで、 $Z_1, Z_2$  は媒質 1、媒質 2 の特性インピーダンスである。なお、磁界表現では  $e_V^{i(\pm)}, -e_H^{i(\pm)}$  がそれぞれ、TE 偏波、TM 偏波に対応する。Wiener 核 ( $A_n^H, A_n^V, C_n^H, C_n^V$ ) は不規則表面上の境界条件により求められる。

#### 4.1.4 散乱波動場の統計量

媒質 1.2 におけるコヒーレント、インコヒーレント散乱を Wiener 核で表現できる (3.1.4 節参照)。

##### コヒーレント散乱

$$\begin{aligned} \text{[媒質 1: } z > 0\text{]} \\ \langle E^1(\mathbf{x}, z; \omega | \lambda_0) \rangle = & \{ e_H^{1(-)}[\lambda_0] N^H(\lambda_0) + e_V^{1(-)}[\lambda_0] N^V(\lambda_0) \} e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS_1(\lambda_0)z} \\ & + \{ e_H^{1(+)}[\lambda_0] A_0^H(\lambda_0) + e_V^{1(+)}[\lambda_0] A_0^V(\lambda_0) \} e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} + iS_1(\lambda_0)z} \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[媒質 2: } z < 0\text{]} \\ \langle E^2(\mathbf{x}, z; \omega | \lambda_0) \rangle = & \{ e_H^{2(-)}[\lambda_0] C_0^H(\lambda_0) + e_V^{2(-)}[\lambda_0] C_0^V(\lambda_0) \} e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x} - iS_2(\lambda_0)z} \quad (4.10) \end{aligned}$$

##### インコヒーレント散乱

$$\begin{aligned} \text{[媒質 1: } z > 0\text{]} \\ P^1(\theta | \theta_0) \equiv & P^{1H}(\theta | \theta_0) + P^{1V}(\theta | \theta_0) \quad (4.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{1H}(\theta | \theta_0) = & \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{1H}(\theta | \theta_0) \quad (4.12) \\ = & k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^H(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 \end{aligned}$$

$$+2! \int_{R_2} |A_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \dots] \quad (4.13)$$

$$P^{1V}(\theta|\theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{1V}(\theta|\theta_0) \quad (4.14)$$

$$= k_1^2 \cos^2 \theta [|A_1^V(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2 + 2! \int_{R_2} |A_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \dots] \quad (4.15)$$

$$P_1^{1H}(\theta|\theta_0) = k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^H(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2 \quad (4.16)$$

$$P_2^{1H}(\theta|\theta_0) = 2! k_1^2 \cos^2 \theta \int_{R_2} |A_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 \quad (4.17)$$

$$P_3^{1H}(\theta|\theta_0) = 3! k_1^2 \cos^2 \theta \int \int_{R_3} |A_3^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (4.18)$$

$$\vdots$$

$$P_1^{1V}(\theta|\theta_0) = k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^V(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2 \quad (4.19)$$

$$P_2^{1V}(\theta|\theta_0) = 2! k_1^2 \cos^2 \theta \int_{R_2} |A_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 \quad (4.20)$$

$$P_3^{1V}(\theta|\theta_0) = 3! k_1^2 \cos^2 \theta \int \int_{R_3} |A_3^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (4.21)$$

$$\vdots$$

[媒質 2:  $z < 0$ ]

$$P^2(\theta|\theta_0) \equiv P^{2H}(\theta|\theta_0) + P^{2V}(\theta|\theta_0) \quad (4.22)$$

$$P^{2H}(\theta|\theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{2H}(\theta|\theta_0) \quad (4.23)$$

$$= k_2^2 \cos^2 \theta [|C_1^H(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2 + 2! \int_{R_2} |C_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \dots] \quad (4.24)$$

$$P^{2V}(\theta|\theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{2V}(\theta|\theta_0) \quad (4.25)$$

$$= k_2^2 \cos^2 \theta [|C_1^V(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2 + 2! \int_{R_2} |C_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \dots] \quad (4.26)$$

$$P_1^{2H}(\theta|\theta_0) = k_2^2 \cos^2 \theta |C_1^H(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2 \quad (4.27)$$

$$P_2^{2H}(\theta|\theta_0) = 2! k_2^2 \cos^2 \theta \int_{R_2} |C_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 \quad (4.28)$$

$$P_3^{2H}(\theta|\theta_0) = 3! k_2^2 \cos^2 \theta \int \int_{R_3} |C_3^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (4.29)$$

$$\vdots$$

$$P_1^{2V}(\theta|\theta_0) = k_2^2 \cos^2 \theta |C_1^V(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2 \quad (4.30)$$

$$P_2^{2V}(\theta|\theta_0) = 2!k_2^2 \cos^2 \theta \int_{H_2} |C_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 \quad (4.31)$$

$$P_3^{2V}(\theta|\theta_0) = 3!k_2^2 \cos^2 \theta \int \int_{H_3} |C_3^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (4.32)$$

⋮

ここで  $P^i, P_n^{i\eta}$  ( $\eta = H, V$ ) は媒質  $i$  におけるインコヒーレント散乱分布を表す。また、 $P_n^{iHH}, P_n^{iHV}$  等も (2.98), (2.99) と同様に定義できる。

## 4.2 近似解法

### 4.2.1 階層方程式

不規則誘電体導波路による散乱の場合と同様に等価境界条件 (3.36), (3.37) に電磁場を Wiener-Itô 展開形式で代入すると、以下のようなベクトル形式の階層方程式を得る。

ベクトル Wiener 核

$$A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} A_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} A_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} C_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} C_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

入射ベクトル Wiener 核

$$N(\lambda_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} N^H(\lambda_0) \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} N^V(\lambda_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

結合行列

$$\begin{aligned} J(\lambda) &\equiv \begin{bmatrix} e_H[\lambda] \\ \frac{e_{Vxy}[\lambda]}{|e_{Vxy}[\lambda]|} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} e_H[\lambda] & \sqrt{\mu_1} e_{Vxy}^1[\lambda] & -\sqrt{\mu_2} e_H[\lambda] & \sqrt{\mu_2} e_{Vxy}^2[\lambda] \\ \sqrt{\epsilon_1} e_{Vxy}^1[\lambda] & -\sqrt{\epsilon_1} e_H[\lambda] & \sqrt{\epsilon_2} e_{Vxy}^2[\lambda] & \sqrt{\epsilon_2} e_H[\lambda] \end{bmatrix} \\ J_0(\lambda) &\equiv \begin{bmatrix} e_H[\lambda] \\ \frac{e_{Vxy}[\lambda]}{|e_{Vxy}[\lambda]|} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} e_H[\lambda] & -\sqrt{\mu_1} e_{Vxy}^1[\lambda] & 0 & 0 \\ -\sqrt{\epsilon_1} e_{Vxy}^1[\lambda] & -\sqrt{\epsilon_1} e_H[\lambda] & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

散乱行列

$$P(\lambda_1|\lambda_0) \equiv -iF(\lambda_1) \begin{bmatrix} e_H[\lambda] \\ \frac{e_{Vxy}[\lambda]}{|e_{Vxy}[\lambda]|} \end{bmatrix}$$

$$\odot \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} f_{11}^1[\lambda_0] & \sqrt{\mu_1} f_{11}^1[\lambda_1|\lambda_0] & \sqrt{\mu_2} f_{11}^2[\lambda_0] & -\sqrt{\mu_2} f_{11}^2[\lambda_1|\lambda_0] \\ \sqrt{\epsilon_1} f_{11}^1[\lambda_1|\lambda_0] & -\sqrt{\epsilon_1} f_{11}^1[\lambda_0] & -\sqrt{\epsilon_2} f_{11}^2[\lambda_1|\lambda_0] & -\sqrt{\epsilon_2} f_{11}^2[\lambda_0] \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$P_0(\lambda_1|\lambda_0) \equiv -iF(\lambda_1) \begin{bmatrix} e_{11}[\lambda] \\ \frac{e_{V,xy}[\lambda]}{|e_{V,xy}[\lambda]|} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} -\sqrt{\mu_1} f_{11}^1[\lambda_0] & \sqrt{\mu_1} f_{11}^1[\lambda_1|\lambda_0] & 0 & 0 \\ \sqrt{\epsilon_1} f_{11}^1[\lambda_1|\lambda_0] & \sqrt{\epsilon_1} f_{11}^1[\lambda_0] & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$f_{11}^1[\lambda_0] \equiv S_1(\lambda_0)e_{11}[\lambda_0] \quad (4.38)$$

$$f_{11}^1[\lambda_1|\lambda_0] \equiv S_1(\lambda_0)e_{V,xy}^1[\lambda_0] + \lambda_1 e_{V,z}^1[\lambda_0] \quad (4.39)$$

ここで $\epsilon_1, \epsilon_2$ は媒質 1.2 の誘電率を、 $\mu_1, \mu_2$ は透磁率を表す。演算子 $\odot$ は(4.36)で定義される。

階層方程式

$$n = 0$$

$$J(\lambda_0)A_0(\lambda_0) + J_0(\lambda_0)N(\lambda_0) = \int P(-\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_1)A_1(\lambda_1|\lambda_0)d\lambda_1 \quad (4.40)$$

$$n = 1$$

$$J(\lambda_0 + \lambda_1)A_1(\lambda_1|\lambda_0) \quad (4.41)$$

$$= P(\lambda_1|\lambda_0)A_0(\lambda_0) + P_0(\lambda_1|\lambda_0)N(\lambda_0) + 2 \int P(-\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0)d\lambda_2$$

$$n = 2$$

$$J(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \quad (4.42)$$

$$= \frac{1}{2}P(\lambda_2|\lambda_0 + \lambda_1)A_1(\lambda_1|\lambda_0) + \frac{1}{2}P(\lambda_1|\lambda_0 + \lambda_2)A_1(\lambda_2|\lambda_0) \\ + 3 \int P(-\lambda_3|\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\lambda_0)d\lambda_3$$

$$n = 3, 4, 5, \dots$$

$$J(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \quad (4.43)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(\lambda_i|\lambda_0 + \dots + \lambda_n)A_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \\ + (n+1) \int P(-\lambda_{n+1}|\lambda_0 + \dots + \lambda_{n+1})A_{n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}|\lambda_0)d\lambda_{n+1}$$

階層方程式(4.40) (4.43)は誘電体導波路の場合(3.47)–(3.50)と全く同じ形式であるが、ベクトル Wiener 核(3.38),(4.33)、結合行列と散乱行列(3.40)–(3.43)、(4.35) (4.37)が異なっている。不規則誘電体導波路の場合の $C_n^H, C_n^V$ と $i \sin[S_2(\lambda)a], \cos[S_2(\lambda)a]$ を

$$C_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \Rightarrow \frac{1}{2}C_n^H(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \quad (4.44)$$

$$C_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \Rightarrow \frac{1}{2}C_n^V(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda_0) \quad (4.45)$$

$$\cos[S_2(\lambda)a] \Rightarrow 1 \quad (4.46)$$

$$i \sin[S_2(\lambda)a] \Rightarrow -1 \quad (4.47)$$

と置き換えると不規則誘電体表面による散乱に関する階層方程式が得られることがわかる。したがって、Wiener 核  $A_n$  は第3章で与えた (3.59) - (3.62) において各ベクトル・行列に対して (4.44) - (4.47) の置き換えをしたもので表される。

#### 4.2.2 近似解

$|\Delta^H|, |\Delta^V|$  の  $|\lambda|$  に対する変化を図 4.4.4.5 に示した。本章では以後  $k_1 = 1, \mu_1 = \mu_2, n = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$  とし、 $\Delta^H, \Delta^V$  は

$$\Delta^H(\lambda) = S_2(\lambda) + S_1(\lambda) \quad (4.48)$$

$$\Delta^V(\lambda) = nS_1(\lambda) + n^{-1}S_2(\lambda) \quad (4.49)$$

とする。(4.48), (4.49) より  $\Delta^H, \Delta^V$  は  $n^2 = \epsilon_2/\epsilon_1$  が有限である限り零点をもたないので、 $\Gamma, \Gamma_0$  の効果を見捨てても有限な解が得られる。 $\Gamma = \Gamma_0 = 0$  と近似して、0 次、1 次、2 次の Wiener 核を成分表示すると以下のようになる。

#### 0 次 Wiener 核

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_0^H(\lambda_0) \\ A_0^V(\lambda_0) \\ C_0^H(\lambda_0) \\ C_0^V(\lambda_0) \end{bmatrix} &= A_0(\lambda_0) \simeq -I_0[\lambda_0]N(\lambda_0) = -J^{-1}(\lambda_0)J_0(\lambda_0)N(\lambda_0) \quad (4.50) \\ &= \begin{bmatrix} -\{S_2(\lambda_0) - S_1(\lambda_0)\}N^H(\lambda_0)\frac{1}{\Delta^H(\lambda_0)} \\ \{nS_1(\lambda_0) - n^{-1}S_2(\lambda_0)\}N^V(\lambda_0)\frac{1}{\Delta^V(\lambda_0)} \\ 2S_1(\lambda_0)N^H(\lambda_0)\frac{1}{\Delta^H(\lambda_0)} \\ 2S_1(\lambda_0)N^V(\lambda_0)\frac{1}{\Delta^V(\lambda_0)} \end{bmatrix} \quad (4.51) \end{aligned}$$

#### 1 次 Wiener 核

$$A_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \quad (4.52)$$

$$A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = nC_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) - n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{VH}(\lambda_1|\lambda_0) \quad (4.53)$$

$$C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1)}(\alpha \cos \phi_{0,0+1} - \beta \sin \phi_{0,0+1}) \quad (4.54)$$

$$C_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) + S_1(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \quad (4.55)$$

$$C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)}\gamma \quad (4.56)$$

$$C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)}(\alpha \sin \phi_{0,0+1} + \beta \cos \phi_{0,0+1}) \quad (4.57)$$

$$\alpha = -(n^2 - 1)\frac{2S_1(\lambda_0)}{\Delta^H(\lambda_0)}N^H(\lambda_0) \quad (4.58)$$

$$\beta = -(n^2 - 1)\frac{2S_1(\lambda_0)S_2(\lambda_0)}{n\Delta^V(\lambda_0)}N^V(\lambda_0) \quad (4.59)$$

$$\gamma = -|\lambda_0||\lambda_0 + \lambda_1|(n^2 - 1)\frac{2S_1(\lambda_0)}{n\Delta^V(\lambda_0)}N^V(\lambda_0) \quad (4.60)$$

## 2 次 Wiener 核

$$\begin{aligned} & A_2^H(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\ = & \frac{iF(\lambda_2)}{2\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \left\{ \left[ (n^2 - 1)C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right. \right. \\ & - [n\zeta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) \\ & - (n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_1)S_2(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0)] \sin \phi_{0+1,0+1+2} \Big\} \\ & + S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ & \times \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} + \xi(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} \right\} \\ + & \frac{iF(\lambda_1)}{2\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \left\{ \left[ (n^2 - 1)C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right. \right. \\ & - [n\zeta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\perp}(\lambda_2|\lambda_0) \\ & - (n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_2)S_2(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0)] \sin \phi_{0+1,0+1+2} \Big\} \\ & + S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ & \times \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} + \xi(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} \right\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} & A_2^V(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\ = & -\frac{iF(\lambda_2)}{2\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \\ & \times \left[ n \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} - \xi(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right. \right. \\ & + \left[ n^{-1}\zeta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) - (n - 1/n)C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) \right] |\lambda_0 + \lambda_1||\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2| \Big\} \\ & + n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \left\{ (n^2 - 1)C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (n-1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_1)S_2(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{VII}(\lambda_1|\lambda_0) + n\zeta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{VI}(\lambda_1|\lambda_0) \right] \cos \phi_{0+1.0+1+2} \Big\} \\
& - \frac{iF(\lambda_1)}{2\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \\
& \times \left[ n \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{II}(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1.0+1+2} - \xi(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{VII}(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1.0+1+2} \right. \right. \\
& + \left. \left[ n^{-1}\zeta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{VII}(\lambda_2|\lambda_0) - (n-1/n)C_1^{VI}(\lambda_2|\lambda_0) \right] |\lambda_0 + \lambda_2| |\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2| \right\} \\
& + n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \left\{ (n^2 - 1)C_1^{II}(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1.0+1+2} \right. \\
& + \left. \left[ (n-1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_2)S_2(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{VII}(\lambda_2|\lambda_0) + n\zeta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{VI}(\lambda_2|\lambda_0) \right] \cos \phi_{0+1.0+1+2} \right\} \Big\} \\
& \quad \quad \quad (4.62)
\end{aligned}$$

$$\zeta(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv S_1(\lambda_0 + \lambda_1) + S_2(\lambda_0 + \lambda_1) \quad (4.63)$$

$$\eta(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv -\{S_1(\lambda_0 + \lambda_1) + S_2(\lambda_0 + \lambda_1)\} \quad (4.64)$$

$$\xi(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv nS_1(\lambda_0 + \lambda_1) + n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1) \quad (4.65)$$

ここで、

$$\zeta(\lambda_0 + \lambda_1) = -\eta(\lambda_0 + \lambda_1) \quad (4.66)$$

の関係を用いれば、さらに整理された形で表現できるが、誘電体導波路による散乱の場合との比較を容易にするために $\zeta, \eta, \xi$ で表した。

### 4.3 コヒーレント散乱

$\Gamma = \Gamma_0 = 0$  とした場合には0次 Wiener 核は無振動解を表す。以下のように境界が平坦である場合について、反射係数  $R_0$  と透過係数  $T_0$  が0次 Wiener 核で定義できる。

TE wave

$$\begin{aligned}
R_0^{II}(\lambda_0) & \equiv \frac{A_0^{II}(\lambda_0)}{N^{II}(\lambda_0)} \\
& = -\frac{S_2(\lambda_0) - S_1(\lambda_0)}{S_2(\lambda_0) + S_1(\lambda_0)} \quad (4.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_0^{II}(\lambda_0) & \equiv \frac{C_0^{II}(\lambda_0)}{N^{II}(\lambda_0)} \\
& = \frac{2S_1(\lambda_0)}{S_2(\lambda_0) + S_1(\lambda_0)} \quad (4.68)
\end{aligned}$$

TM wave

$$\begin{aligned}
R_0^V(\lambda_0) & \equiv \frac{A_0^V(\lambda_0)}{N^V(\lambda_0)} \\
& = \frac{nS_1(\lambda_0) - n^{-1}S_2(\lambda_0)}{nS_1(\lambda_0) + n^{-1}S_2(\lambda_0)} \quad (4.69)
\end{aligned}$$

$$T_0^V(\lambda_0) \equiv \frac{C_0^V(\lambda_0)}{N^V(\lambda_0)}$$

$$= \frac{2S_1(\lambda_0)}{nS_1(\lambda_0) + n^{-1}S_2(\lambda_0)} \quad (4.70)$$

TM 偏波入射時、(4.69) より、入射角 $\theta_0$  が Brewster 角 $\theta_B$

$$\tan \theta_B = n \quad (4.71)$$

と等しい場合には  $R_0^V = 0$  となり、鏡面反射波は生じないことがわかる。

### 4.3.1 Brewster 角の変化

$\Gamma, \Gamma_0$  の効果を考慮に入れた場合のコヒーレント波は (3.76) より

$$A_0(\lambda_0) = -[I - \Gamma(\lambda_0)]^{-1}[I_0(\lambda_0) - \Gamma_0(\lambda_0)]N(\lambda_0) \quad (4.72)$$

で与えられる。 $\Gamma, \Gamma_0$  は  $\sigma^2$  のオーダーであるので、 $\Gamma, \Gamma_0$  の 1 次のままで展開すると

$$A_0(\lambda_0) \simeq -[I_0(\lambda_0) + \Gamma(\lambda_0) - \Gamma_0(\lambda_0)]N(\lambda_0) \quad (4.73)$$

となる。(4.50) に替えて (4.73) を用いると、多重散乱の効果により変化した Brewster 角が得られる。図 4.3 に反射係数  $R_0^V$  を示した。Brewster 角は負の側にシフトし、反射係数の最小値は零でなくなることがわかる [20, 21]。なお、ここでは数値計算の簡単化のために 1 次元不規則表面について計算した [34]。

## 4.4 インコヒーレント散乱分布

媒質 1.2 における 1 次散乱分布と 2 次散乱分布 ( $P_1^{III}, P_2^{III}, P_1^{IV}, P_2^{IV}$ , 等) の数値計算を (1) 屈折率が小さい側から入射する場合 ( $n > 1$ )、(2) 屈折率が大きい側から入射する場合 ( $n < 1$ ) について行った。表面粗さ  $k_1\sigma = 0.3$ 、相関距離  $k_1l = 1.0$  とした。(1) の場合は光学的に疎な媒質から密な媒質への入射に相当し、(2) の場合は光学的に密な媒質から疎な媒質への入射に相当する。また、(2) で  $n$  が 1 より僅かに小さい場合は X 線が金属などの結晶に入射する場合に相当する。(1) の場合 ( $n = 1.64$ ) については、媒質 1 側における 1 次散乱と 2 次散乱 ( $P_1^{III}, P_1^{IV}, P_2^{III}, P_2^{IV}$ ) の数値計算結果を図 4.6-4.12 に示した。また、媒質 2 側における 1 次散乱 ( $P_2^{III}, P_2^{IV}$ ) を図 4.13, 4.14 に示した。(2) の場合 ( $n = 0.3, 0.9, 0.99$ ) については、媒質 1 側における 1 次散乱 ( $P_1^{III}, P_1^{IV}$ ) の数値計算結果を図 4.15-4.23 に、2 次散乱 ( $P_2^{III}, P_2^{IV}$ ) を図 4.24, 4.25 に示した。

2 次散乱は 1 次散乱に比べるとはるかに小さく、インコヒーレント散乱においては 1 次散乱が支配的であることがわかる。また、1 次散乱においては、TE(TM) 偏波入射時の入射面内 ( $\phi = 0^\circ$ ) への散乱波には TM(TE) 偏波成分はなく、交差偏波散乱はみられないことがわかる。一方、2 次散乱においては交差偏波散乱がみられる (図 4.6-4.11) 参照。散乱分布にみられるピークや零点 (図 4.10, 4.15 等参照) については次節以降で議論する。



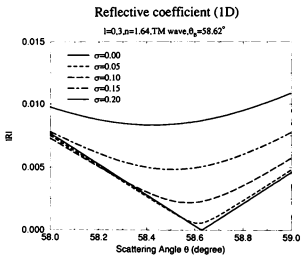


図 4.3: 1 次元不規則表面による反射係数

## 4.4.1 散乱 Brewster 角

図 4.10.4.12 に示すように TM 偏波入射の場合、媒質 1 での入射面内 ( $\phi = 0^\circ$ ) への 1 次散乱分布に零点がみられることがわかる (入射面外への散乱分布にも TM 偏波成分に零点がみられるが、TE 偏波成分が零ではない)。

2 次散乱の強度は非常に小さいので、この零点の方向 ( $\Theta_{B1}$  とする) では散乱波の強度はほぼ零に等しくなる。また、入射角が Brewster 角  $\theta_B$  に等しい場合、 $\Theta_{B1}$  は  $\theta_B$  に等しくなる (図 4.12 参照)。更に、媒質 2 での散乱分布にも  $\phi = 180^\circ$  に零点 ( $\Theta'_{B2}$  とする) がみられる (図 4.14 参照)。

図 4.26 に示すように、 $\Theta_{B1}$  と  $\Theta'_{B2}$  を、平坦な誘電体境界面による反射における Brewster 角をインコヒーレント散乱へと一般化したものみなし、散乱 Brewster 角と呼ぶ。通常の Brewster 角は媒質の屈折率のみに依存するが、散乱 Brewster 角は入射角にも依存する。

次に、散乱 Brewster 角  $\Theta_{B1}$ ,  $\Theta'_{B2}$  を TM 偏波入射時 ( $N^H = 0, N^V = 1$ ) の 1 次 Wiener 角  $A_1^V, C_1^V$  より求める。

媒質 1 入射面内 ( $\phi_{0,\theta+1} = 0^\circ$ ) における 1 次散乱の TM 偏波成分は

$$A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = nC_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) - n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \quad (4.74)$$

$$= \frac{2i(n^2 - 1)F(\lambda_1)S_1(\lambda_0)}{n\Delta^V(\lambda_0)\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \left\{ n|\lambda_0||\lambda_0 + \lambda_1| - n^{-1}S_2(\lambda_0)S_2(\lambda_0 + \lambda_1) \right\} \quad (4.75)$$

$$\equiv \frac{2i(n^2 - 1)F(\lambda_1)S_1(\lambda_0)}{n^2\Delta^V(\lambda_0)\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} G \quad (4.76)$$

となる。 $G$  は

$$G \equiv n^2|\lambda_0||\lambda_0 + \lambda_1| - S_2(\lambda_0)S_1(\lambda_0 + \lambda_1) \quad (4.77)$$

$$= n^2|\sin\theta_0||\sin\theta| - n^2\cos\theta'_0\cos\theta' \quad (4.78)$$

$$= n^4|\sin\theta'_0||\sin\theta'| - n^2\cos\theta'_0\cos\theta' \quad (4.79)$$

と定義される。ここで  $\theta, \theta'$  はそれぞれ媒質 1、媒質 2 における散乱方向を意味し、以下のような Snell の法則で関係付けられている。

$$n\sin\theta' = \sin\theta \quad (4.80)$$

図 4.27 に (4.77) で定義した  $G$  と散乱方向  $\theta$  の関係を示す。 $G = 0$  となる角度  $\theta = \Theta_{B1}$  が  $A_1^V = 0$  となる方向、つまり、散乱 Brewster 角に相当する。(4.79) より、以下のような  $\Theta'_{B1}$  と  $\theta'_0$  の関係がわかる。

$$\tan\theta'_0 \tan\Theta'_{B1} = n^{-2} \quad (4.81)$$

ここで、散乱 Brewster 角が鏡面反射方向にみられる場合  $\theta_0 = \Theta_{B1}$  を考えると、(4.80), (4.81) より

$$\tan\theta_0 = \tan\Theta_{B1} = n \quad (4.82)$$

が求まる。この関係式は入射角と Brewster 角  $\theta_B$  ( $\tan \theta_B = n$ ) が等しい場合には、散乱 Brewster 角と Brewster 角  $\theta_B$  に一致することを意味している。

(4.81) より、 $\Theta_{B1}$  を明示的な形式で  $\theta_0$  の関数として表現すると

$$\Theta_{B1} = \sin^{-1} \left[ n \sin \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{1}{n^2 \tan[\sin^{-1}(n^{-1} \sin \theta_0)]} \right) \right\} \right] \quad (4.83)$$

となる (図 4.28 参照)。

$\theta_0 = 0^\circ$  とすると

$$\sin \Theta_{B1} = n \quad (4.84)$$

となり、垂直入射 ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) で屈折率  $n < 1$  の場合は  $\Theta_{B1}$  は全反射の臨界角  $\theta_c$  に等しくなることがわかる。ここで  $\theta_c$  は

$$\sin \theta_c = n \quad (S_2(\lambda) = 0) \quad (4.85)$$

と定義される。

**媒質 2** 入射面内 ( $\phi_{0,B+1} = 180^\circ$ ) における 1 次散乱の TM 偏波成分は

$$C_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) + S_1(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \quad (4.86)$$

$$= \frac{2i(n^2 - 1)F(\lambda_1)S_1(\lambda_0)}{n\Delta^V(\lambda_0)\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \{ |\lambda_0||\lambda_0 + \lambda_1| - S_2(\lambda_0)S_2(\lambda_0 + \lambda_1) \} \quad (4.87)$$

$$\equiv \frac{2i(n^2 - 1)F(\lambda_1)S_1(\lambda_0)}{n\Delta^V(\lambda_0)\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} H \quad (4.88)$$

となる。 $H$  は

$$H \equiv |\lambda_0||\lambda_0 + \lambda_1| - S_2(\lambda_0)S_1(\lambda_0 + \lambda_1) \quad (4.89)$$

$$= |\sin \theta_0| |\sin \theta| - n \cos \theta'_0 \cos \theta \quad (4.90)$$

$$= n |\sin \theta'_0| |\sin \theta| - n \cos \theta'_0 \cos \theta \quad (4.91)$$

と定義される。

図 4.29 に (4.89) で定義した  $H$  と散乱方向  $\theta'$  の関係を示す。 $H = 0$  となる角度  $\theta' = \Theta'_{B2}$  が  $C_1^V = 0$  となる方向、つまり、散乱 Brewster 角に相当する。(4.91) より、以下のような  $\Theta_{B1}$  と  $\theta'_0$  の関係がわかる。

$$\tan \theta'_0 \tan \Theta_{B2} = 1 \quad (4.92)$$

(4.92) より、 $\Theta'_{B2}$  を明示的な形式で  $\theta_0$  の関数として表現すると

$$\Theta'_{B2} = \sin^{-1} \left[ n^{-1} \sin \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{1}{\tan[\sin^{-1}(n^{-1} \sin \theta_0)]} \right) \right\} \right] \quad (4.93)$$

となる (図 4.30 参照)。

$\theta_0 = 0^\circ$  とすると

$$\sin \Theta'_{B2} = n^{-1} \quad (4.94)$$

となり、垂直入射 ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) で屈折率  $n > 1$  の場合は  $\Theta'_{B2}$  は全反射の臨界角  $\theta'_c$  に等しくなることがわかる。ここで  $\theta'_c$  は

$$\sin \theta'_c = n^{-1} \quad (S_1(\lambda) = 0) \quad (4.95)$$

と定義される。 $n = 2/3$  ( $< 1$ ) と  $3/2$  ( $> 1$ ) の場合について、 $\Theta_{B1}$ 、 $\Theta'_{B2}$  と  $\theta_0$  の関係を図 4.31 に示した。

#### 4.4.2 準異常散乱と Yoneda ピーク

図 4.15、4.16 に示すように、光学的に密な媒質から入射する場合 ( $n < 1$ )、媒質 1 (光学的に密な媒質) での散乱分布の臨界角においてピークがあることがわかる。これらのピークは Wiener 核が分母にもつ共通因数である  $\Delta^H$ 、 $\Delta^V$  によるものである。 $1 < |\lambda| < n$  または  $n < |\lambda| < 1$  である場合 ( $k_1 = 1$  としている)、 $|\Delta^H|$ 、 $|\Delta^V|$  は

$[n > 1 : 1 < |\lambda| < n \text{ の場合}]$

$$|\Delta^H(\lambda)|^2 = n^2 - 1 \quad (4.96)$$

$$|\Delta^V(\lambda)|^2 = (n^2 - n^{-2})|\lambda|^2 + 1 - n^2 \geq 1 - n^2 \quad (4.97)$$

$[n < 1 : n < |\lambda| < 1 \text{ の場合}]$

$$|\Delta^H(\lambda)|^2 = 1 - n^2 \quad (4.98)$$

$$|\Delta^V(\lambda)|^2 = (-n^2 + n^{-2})|\lambda|^2 - 1 + n^2 \geq n^2 - n^4 \quad (4.99)$$

となる (図 4.4.4.5 参照)。 $n < 1$  である場合、 $\Delta^H$ 、 $\Delta^V$  は  $|\lambda| = n$ 、すなわち媒質 1 側の臨界角  $\theta = \theta_c$  で最小となる。一方、 $n > 1$  である場合、 $\Delta^H$ 、 $\Delta^V$  は  $|\lambda| = 1$ 、すなわち媒質 2 側の臨界角  $\theta' = \theta'_c$  で最小となる。したがって、図 4.15 - 4.22 にみられるような臨界角方向への異常散乱は共通因数  $1/\Delta^H$ 、 $1/\Delta^V$  によるものであるといえる。 $n \simeq 1$  である場合、インコヒーレント散乱の強度は小さくなるが、臨界角への散乱ピークは鋭くなる (図 4.15.4.16 参照)。これは、 $\Delta^H$ 、 $\Delta^V$  の最小値は  $n \simeq 1$  であるときに零に漸近するからである (図 4.4.4.5 参照)。

一般に異常散乱は分歧による特異点  $1/S_1(\lambda)$  や [68, 30, 31]、表面波モードを表す極  $1/\Delta^H$ 、 $1/\Delta^V$  によるもので [33]、多重散乱の効果を考慮に入れない摂動法での解の発散の原因となるものである (第 2 章参照)。しかし、不規則誘電体表面による散乱の場合、 $n$  は有限な値でありかつ実数であるので  $\Delta^H$ 、 $\Delta^V$  は  $n - 1$  のときに零に漸近するだけである。そこで、特異点による異常散乱と区別するために臨界角方向でみられる散乱ピークを準異常散乱と呼ぶ。異常散乱は表面に沿って伝搬するモードに起因するが、準異常散乱は屈折率の小さい媒質側で表面に沿ったラティラル波によるものと考えられる。ラティラル波は屈折率の大きい側の臨界角方向へ放射しながら表面に沿って伝搬する波動である (図 4.32 参照) [77]-[81]。

図4.13.4.14に示すように、光学的に疎な媒質からの入射の場合 ( $n > 1$ )、媒質2(光学的に密な媒質)での散乱分布に臨界角方向へのピークがみられる。すなわち、光学的に密な媒質、疎な媒質のいずれの側から入射した場合でも、光学的に密な媒質への散乱において準異常散乱が存在することがわかる。

### Yoneda ピーク

X線散乱において、臨界角方向への異常散乱が生じることが知られており、Yoneda ピークと呼ばれている[72]-[75]。X線領域における散乱体の相対屈折率は1よりわずかに小さい( $n = 1 - 10^{-6} \sim 10^{-3}$ )ので臨界角  $90^\circ$ に近い値となる。これまでにYoneda ピークに関する理論的研究が散乱体の相対屈折率は1よりわずかに小さいことを前提条件として進められてきたが[74, 76, 75]、X線散乱でみられるYoneda ピークは上述の準異常散乱の一例であり、臨界角方向への散乱ピークはX線散乱特有の現象ではなく、より普遍的な現象であるといえる。

### 準異常散乱と散乱 Brewster 角

これまでに述べたように散乱分布の概形は臨界角 $\theta_c$ での  $1/\Delta^H$ ,  $1/\Delta^V$  と散乱 Brewster 角 $\Theta_B$ での  $G$ ,  $H$  の零点によって決まる。 $\theta_c$ は入射角 $\theta_0$ に依存しないが、 $\Theta_B$ は $\theta_0$ に依存し、 $\theta_0 = 0^\circ$ のときに $\Theta_B = \theta_c$ となり、準異常散乱と散乱 Brewster 角が一致する。 $\theta_0$ が零に近付くと、準異常散乱によるピークの形が大きく変化し、 $\theta_0 = 0^\circ$ となるとピークはなくなり臨界角方向が零点となる(図4.23参照)。

### 相反性

1次 Wiener 核 (4.52), (4.53) は以下のような相反定理を満たす。

$$\frac{A_1^{HH}(\lambda_1|\lambda_0)}{S_1(\lambda_0)} = \frac{A_1^{HH}(\lambda_1|-\lambda_0-\lambda_1)}{S_1(-\lambda_0-\lambda_1)} \quad (4.100)$$

$$\frac{A_1^{HV}(\lambda_1|\lambda_0)}{S_1(\lambda_0)} = \frac{A_1^{HV}(\lambda_1|-\lambda_0-\lambda_1)}{S_1(-\lambda_0-\lambda_1)} \quad (4.101)$$

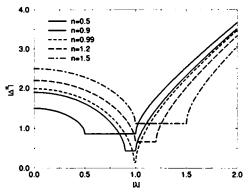
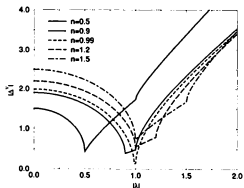
$$\frac{A_1^{VV}(\lambda_1|\lambda_0)}{S_1(\lambda_0)} = \frac{A_1^{VV}(\lambda_1|-\lambda_0-\lambda_1)}{S_1(-\lambda_0-\lambda_1)} \quad (4.102)$$

ここで、 $A_1^{HH}$ ,  $A_1^{HV}$ ,  $A_1^{VH}$ ,  $A_1^{VV}$  は、それぞれTE→TE散乱、TM→TE散乱、TE→TM散乱、TM→TM散乱を意味する。(4.100)-(4.102)は散乱過程の時間反転対称性を表している(2.1.7節参照)。

$\lambda_0 + \lambda_1$ が臨界角への散乱波と一致し、(4.100)-(4.102)の左辺が準異常散乱を表すとき、右辺も大きな値をもつことになる。これは、臨界角に近い角度で入射する場合にはインコヒーレント散乱波が強く生じることを意味する。図4.19-4.22に示すように、散乱波の強度が臨界角 $\theta_c = 65^\circ$ に最も近い場合である $\theta_0 = 60^\circ$ のときに大きくなることがわかる。

## 後方強調散乱

2次散乱は非常に小さいが、図4.25に示す散乱波のTM偏波成分には後方強調散乱がみられることがわかる。第2.3章で述べたように2次散乱でみられる後方強調散乱ピークでは中間状態として表面波モードの役割が重要であるが、誘電体表面の場合は中間状態が $\Delta^H$ ,  $\Delta^V$ の最小値に対応する成分、つまり、ラティラル波の寄与が大きいと考えられる。このラティラル波の効果が顕著となるのは $n \sim 1$ の場合であるので、 $n \sim 1$ であるときにのみ後方強調散乱がみられる。

図 4.4:  $|\Delta^H|$  と  $\lambda$  の関係図 4.5:  $|\Delta^V|$  と  $\lambda$  の関係

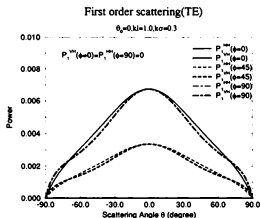


図 4.6: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{(H)}, P_1^{(V)}$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 1.64$

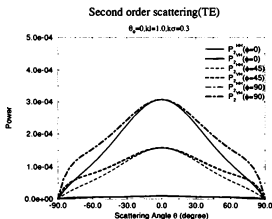


図 4.7: 媒質 1 における 2 次散乱分布 ( $P_2^{(H)}, P_2^{(V)}$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 1.64$



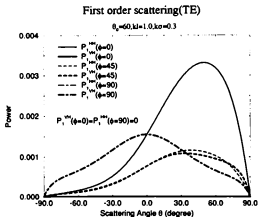


図 4.8: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{III}$ ,  $P_1^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 1.64$

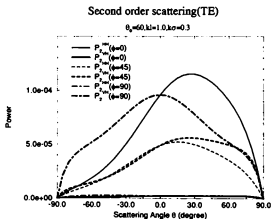


図 4.9: 媒質 1 における 2 次散乱分布 ( $P_2^{III}$ ,  $P_2^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 1.64$

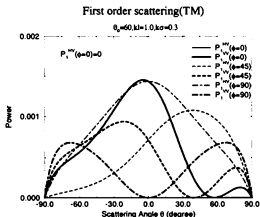


図 4.10: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{IH}$ ,  $P_1^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、TM 偏波入射、 $n = 1.64$

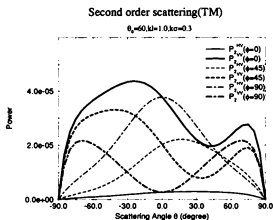


図 4.11: 媒質 1 における 2 次散乱分布 ( $P_2^{IH}$ ,  $P_2^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、TM 偏波入射、 $n = 1.64$

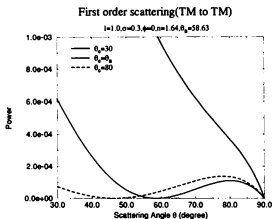


図 4.12: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^V$ )、入射角  $\theta_0 = 30^\circ, \theta_B, 80^\circ$ 、TM 偏波入射、 $n = 1.64, \phi = 0^\circ$

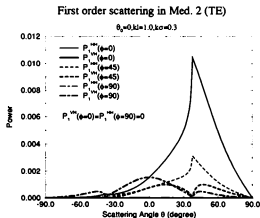


図 4.13: 媒質 2 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{2H}$ ,  $P_1^{2V}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 1.64$

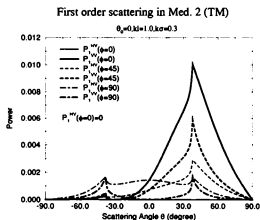


図 4.14: 媒質 2 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{2H}$ ,  $P_1^{2V}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、TM 偏波入射、 $n = 1.64$

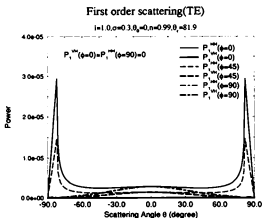


図 4.15: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^H, P_1^V$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 0.99$

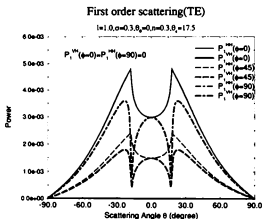


図 4.16: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^H, P_1^V$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 0.3$

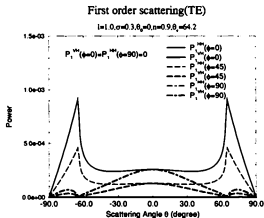


図 4.17: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{IH}, P_1^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 1.64$

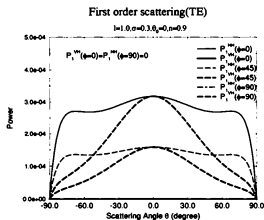


図 4.18: 媒質 2 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{2H}, P_1^{2V}$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射、 $n = 0.9$

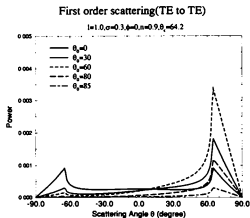


図 4.19: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{IH}$ )、TE 偏波入射、 $n = 0.9$ 、 $\phi = 0^\circ$

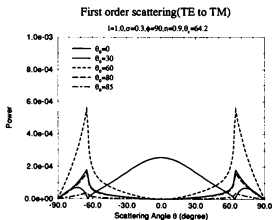
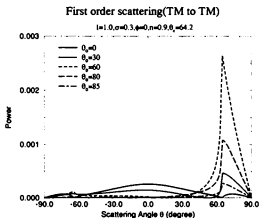
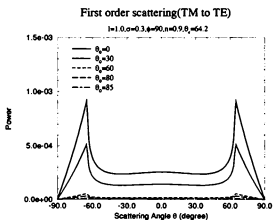


図 4.20: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_1^{IV}$ )、TE 偏波入射、 $n = 0.9$ 、 $\phi = 90^\circ$

図 4.21: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_I^{IV}$ )、TM 偏波入射、 $n = 0.9$ ,  $\phi = 0^\circ$ 図 4.22: 媒質 1 における 1 次散乱分布 ( $P_I^{III}$ )、TM 偏波入射、 $n = 0.9$ ,  $\phi = 90^\circ$



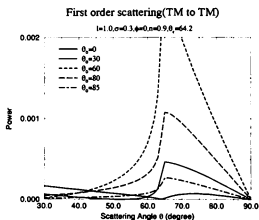


図 4.23: 図 4.21 の拡大図

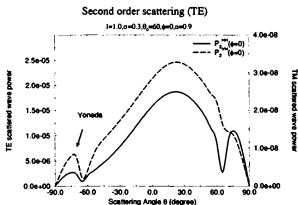


図 4.24: 媒質 1 における 2 次散乱分布 ( $P_2^{IH}, P_2^{IV}$ ), 入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ , TE 偏波入射,  $n = 0.9, \phi = 0^\circ$

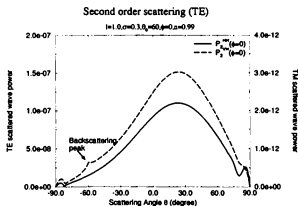


図 4.25: 媒質 1 における 2 次散乱分布 ( $P_2^{IH}, P_2^{IV}$ ), 入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ , TE 偏波入射,  $n = 0.99, \phi = 0^\circ$

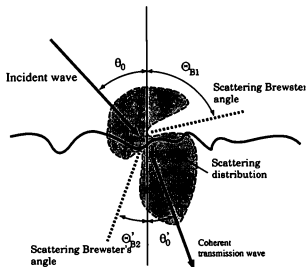


図 4.26: 散乱 Brewster 角の定義。TM 偏波入射時に散乱が生じない方向  $\theta_{B1}$ ,  $\theta'_{B2}$  が存在する。

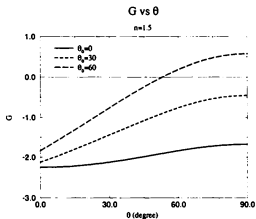


図 4.27:  $G$  と  $\theta$  の関係。 $G=0$  は媒質 1 における散乱 Brewster 角を意味する。

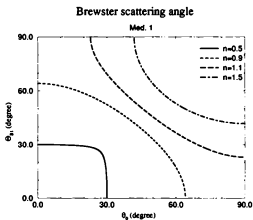


図 4.28: 散乱 Brewster 角 (媒質 1)

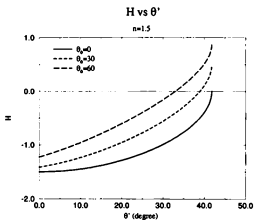


図 4.29:  $H$  と  $\theta'$  の関係。 $H = 0$  は媒質 2 における散乱 Brewster 角を意味する。

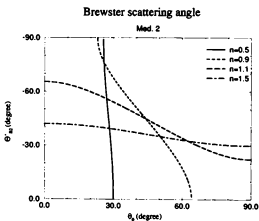


図 4.30: 散乱 Brewster 角 (媒質 2)

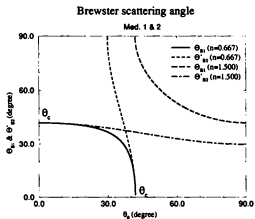
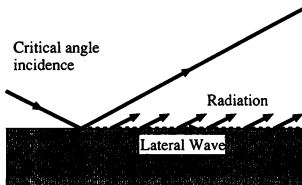
図 4.31: 散乱 Brewster 角 ( $n = 2/3, 3/2$ )

図 4.32: ラテラル波



## 第 5 章

# 散乱波の偏波特性 —+45°偏波入射—

第 2.3.4 章での解析では入射波の偏波は TE または TM である場合を取り扱ってきた。TE 偏波ベクトルは入射面に垂直な成分のみ、また、TM 偏波ベクトルは入射面内の成分のみからなるが、本章ではより一般的な偏波で入射した場合を考え、+45°偏波入射の場合を解析する。+45°偏波入射は互いにコヒーレントな TE 偏波入射波と TM 偏波入射波が同時に入射した場合に相当する。本章でもこれまでの章と同様に、不規則表面は統計的に一様かつ等方であるとしたが、+45°偏波の場合、散乱分布は入射面に対して非対称となることを示す。なお、本章で用いる不規則表面は第 4 章で取り扱ったものと同様のものとして、金属表面 (屈折率  $n$  が複素数) と誘電体表面 ( $n$  が正の実数) の場合を計算した。

5.1 節では散乱波の偏光度について議論する。1 次散乱波の偏光度は 1 であり、偏光度の低下は 2 次以上の高次散乱の影響で生じることを示す。5.2 節では 1 次ウイナー核を電界の水平成分による散乱 (水平散乱) と垂直成分による散乱 (垂直散乱) に分けて表現し、垂直散乱と水平散乱では角度依存性が異なることを示す。5.3 節では 1 次インコヒーレント散乱分布を数値計算し、+45°偏波入射時には散乱分布が非対称となることを示し、その原因を考察する。

### 5.1 散乱波の偏光度

散乱波の偏波を評価するために、ある方向  $\lambda_s$  への散乱波  $e^{i\lambda_s \cdot \mathbf{x} + iS_1(\lambda_s)z}$  の振幅を求めると (4.5) より

$$\begin{aligned} & \left\{ e_H[\lambda_s] A_1^H(\lambda_s - \lambda_0|\lambda_0) + e_V[\lambda_s] A_1^V(\lambda_s - \lambda_0|\lambda_0) \right\} \hat{h}_1[dB(\lambda_s - \lambda_0)] \\ & + \int \left\{ e_H[\lambda_s] A_2^H(\lambda_s - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0) + e_V[\lambda_s] A_2^V(\lambda_s - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0) \right\} \\ & \quad \times \hat{h}_2[dB(\lambda_s - \lambda_0 - \lambda_2), dB(\lambda_2)] \cdots \end{aligned} \quad (5.1)$$

となる。散乱波の偏波は TE 偏波成分と TM 偏波成分の係数の比によってきまる。1 次散乱の係数 ( $A_1^H, A_1^V$ ) の比はランダム測度  $\hat{h}_1[dB(\lambda_s - \lambda_0)]$  に依存しない。一方、2 次散乱の係数 ( $A_2^H, A_2^V$ ) の



比は $\lambda_2$ に関する積分を通してランダム測定 $\int d\lambda [dB(\lambda_s - \lambda_0 - \lambda_2), dB(\lambda_2)]$ に依存する。よって、2次以上の高次の項を無視すると、ある方向 $\lambda_s$ への散乱波の偏波は不規則性なく一意にきまる。したがって、1次の近似では散乱波の偏光度は1であり、偏光度の低下は2次以上の多重散乱によるものであることがわかる[34]。

## 5.2 水平散乱と垂直散乱

偏波ベクトル(3.3)-(3.9)に基づき、

$$|e_H[\lambda]| = 1, \quad |e_{V_{xy}}[\lambda]| = \frac{S_z(\lambda)}{k_z}, \quad |e_{V_z}[\lambda]| = \frac{\lambda}{k_z} \quad (5.2)$$

を用いて、1次ウイナー核(4.52)-(4.60)を表現すると。

$$A_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \quad (5.3)$$

$$= C_C \frac{|e_H[\lambda_0 + \lambda_1]|}{\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1)} \left( \frac{|e_H[\lambda_0]|}{\Delta^H(\lambda_0)} \cos \phi_{0,0+1} N^H(\lambda_0) - \frac{|e_{V_{xy}}^2[\lambda_0]|}{\Delta^V(\lambda_0)} \sin \phi_{0,0+1} N^V(\lambda_0) \right)$$

$$A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) \\ = n^2 C_C \frac{|e_{V_z}^2[\lambda_0 + \lambda_1]|}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \frac{|e_{V_z}^2[\lambda_0]|}{\Delta^V(\lambda_0)} N^V(\lambda_0) \quad (5.4)$$

$$- C_C \frac{|e_{V_{xy}}^2[\lambda_0 + \lambda_1]|}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \left( \frac{|e_H[\lambda_0]|}{\Delta^H(\lambda_0)} \sin \phi_{0,0+1} N^H(\lambda_0) + \frac{|e_{V_{xy}}^2[\lambda_0]|}{\Delta^V(\lambda_0)} \cos \phi_{0,0+1} N^V(\lambda_0) \right)$$

$$C_1^V(\lambda_1|\lambda_0) \\ = C_C \frac{|e_{V_z}^2[\lambda_0 + \lambda_1]|}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \frac{|e_{V_z}^2[\lambda_0]|}{\Delta^V(\lambda_0)} N^V(\lambda_0) \quad (5.5)$$

$$+ C_C \frac{|e_{V_{xy}}^2[\lambda_0 + \lambda_1]|}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \left( \frac{|e_H[\lambda_0]|}{\Delta^H(\lambda_0)} \sin \phi_{0,0+1} N^H(\lambda_0) + \frac{|e_{V_{xy}}^2[\lambda_0]|}{\Delta^V(\lambda_0)} \cos \phi_{0,0+1} N^V(\lambda_0) \right)$$

$$C_C = 2iF(\lambda_1)(n^2 - 1)S_1(\lambda_0) \quad (5.6)$$

となる。(5.3)-(5.5)には $e_H, e_{V_{xy}}$ からなる項と $e_{V_z}^2$ からなる項があり、前者を水平散乱、後者を垂直散乱と呼ぶ。すなわち、(5.4)と(5.5)の第1項は垂直散乱に、(5.3)-(5.5)のその他の項は水平散乱に相当する。

TE 偏波入射時( $N^H = 1, N^V = 0$ )、任意の方向への水平散乱はTE 偏波、TM 偏波の両成分からなるが、 $\phi_{0,0+1} = 0^\circ (\sin \phi_s = 0)$ ではTE 偏波のみ、 $\phi_{0,0+1} = 90^\circ (\cos \phi_s = 0)$ ではTM 偏波のみとなる。TM 偏波入射時( $N^H = 0, N^V = 1$ )、 $\phi_{0,0+1} = 0^\circ$ ではTM 偏波のみ、 $\phi_{0,0+1} = 90^\circ$ ではTE 偏波のみとなる。一方、垂直散乱では $\phi_{0,0+1}$ に依存せずTM 偏波入射時に全方向にTM 偏波散乱波を生じる。

TE 偏波散乱波( $A_1^H, C_1^H$ )は水平散乱のみからなるが、TM 偏波散乱波( $A_1^V, C_1^V$ )は水平散乱、垂直散乱の両方からなる。よって、TM 偏波入射時には $\phi_{0,0+1} = 90^\circ$ への散乱波はTE 偏波、TM 偏波の両成分からなるが、TE 偏波入射時にはTM 偏波成分のみとなる。

## 5.3 非対称散乱

1 次のインコヒーレント散乱分布 ( $P_I^H, P_I^V$ ) を数値計算した。図 5.1-5.6 に銀表面 (屈折率  $n = 0.0482 + 4.1985i$ ) による散乱を示した。図 5.5.5.6 は  $+45^\circ$  偏波入射 (TE 偏波+TM 偏波入射:  $N^H = N^V = 1$ ) 時の  $\phi = 90^\circ$  への散乱分布であり、また、図 5.7.5.8 は誘電体表面 (屈折率  $n = 1.04$ ) による媒質 1.2 への散乱分布 (TM 偏波成分) である。銀表面による散乱と誘電体表面による散乱を比較すると銀の場合の方が角度の大きい散乱が顕著であることがわかる (図 5.6.5.7 参照)。これは 1.2.1 節で述べた異常散乱によるものである。銀表面には表面プラズモンモードがありこれが励起され、表面に沿った散乱  $\theta = 90^\circ$  に近い方向の散乱が強くなる。

図 5.2.5.3 に示すように、TE または TM 偏波入射時には  $\phi = 90^\circ$  における散乱分布は TE 偏波成分、TM 偏波成分ともに対称であるが、 $+45^\circ$  偏波入射時には TM 偏波散乱波が非対称となる (図 5.4.5.6-5.8 参照)。これは不規則表面が  $+45^\circ$  偏波入射、すなわち TE 偏波入射波と TM 偏波入射波が同時に入射した場合に、TE 偏波入射波による散乱波と TM 偏波入射波による散乱波が干渉し、非対称な散乱分布が形成されることを意味している。ただし  $+45^\circ$  偏波入射時も、TE 偏波散乱波は対称である (図 5.5 参照)。

### 5.3.1 水平散乱と垂直散乱の干渉

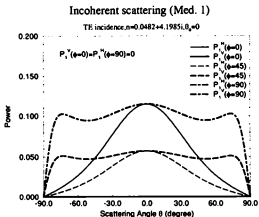
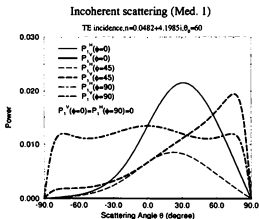
$\phi = 90^\circ$  における媒質 1 への TM 偏波散乱波の電界振幅を (5.4) の 1 次ウィナー核  $A_1^V$  より計算し、図 5.9 に示した。ここで TE→TM 散乱、TM→TM 散乱はそれぞれ TM 偏波散乱波の TE 偏波入射波による寄与と TM 偏波入射波による寄与を意味する。(3.111) の第 1 項は TM→TM 散乱に、第 2 項は TE→TM 散乱に相当し、第 3 項は零となる。このとき ( $\phi = 90^\circ$ )、TM→TM 散乱は垂直散乱、TE→TM 散乱は水平散乱からなる<sup>1</sup>。TE→TM 散乱波の符号は  $\theta = 0^\circ$  で変化するが、TM→TM 散乱波の符号は不変であることがわかる<sup>2</sup>。よって、 $+45^\circ$  偏波入射時には  $\theta < 0^\circ$  では TE→TM 散乱 (水平散乱) と TM→TM 散乱 (垂直散乱) の干渉により強め合い、 $\theta > 0^\circ$  では干渉により弱め合い、散乱分布が非対称となる。

### 5.3.2 電気双極子による放射

非対称散乱は以下に述べるようなモデルで物理的に解釈することができる。 $+45^\circ$  偏波入射波は不規則表面上に図 5.10 に示すような傾斜した電気双極子モーメントを誘起する。散乱波は誘起された双極子モーメントの放射によるものであるとすると、放射パターンは入射面に対して対称でないので非対称な散乱波が生じることになる。媒質 1 側では  $\theta < 0^\circ$  への、媒質 2 側では  $\theta > 0^\circ$  への散乱が強くなる。

<sup>1</sup>一般の場合 ( $\phi \neq 90^\circ$ )、TM→TM 散乱は垂直散乱と水平散乱の両成分からなり、TE→TM 散乱、TM→TE 散乱、TE→TE 散乱は水平散乱のみからなる。

<sup>2</sup> $\theta = 0^\circ$  でみられる不連続は偏波ベクトルの定義によるものである。

図 5.1: 銀表面による 1 次散乱分布 ( $P_1^{IH}$ ,  $P_1^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 、TE 偏波入射図 5.2: 銀表面による 1 次散乱分布 ( $P_1^{IH}$ ,  $P_1^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、TE 偏波入射

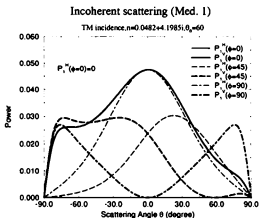


図 5.3: 銀表面による 1 次散乱分布 ( $P_1^{III}, P_1^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、TM 偏波入射

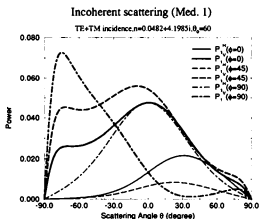


図 5.4: 銀表面による 1 次散乱分布 ( $P_1^{III}, P_1^{IV}$ )、入射角  $\theta_0 = 60^\circ$ 、+45° 偏波入射

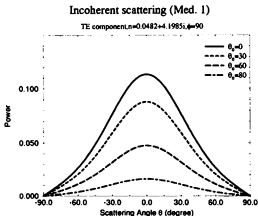


図 5.5: 銀表面による 1 次散乱分布の TE 偏波成分 ( $P_1^{III}$ )、+45°偏波入射、 $\phi = 90^\circ$

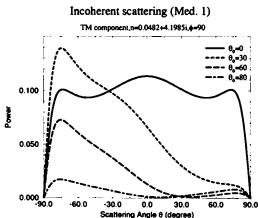


図 5.6: 銀表面による 1 次散乱分布の TM 偏波成分 ( $P_1^{IV}$ )、+45°偏波入射、 $\phi = 90^\circ$

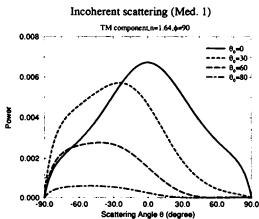


図 5.7: 誘電体表面による 1 次散乱分布 (媒質 1) の TM 偏波成分 ( $P_1^{1V}$ )、 $+45^\circ$  偏波入射、 $\phi = 90^\circ$

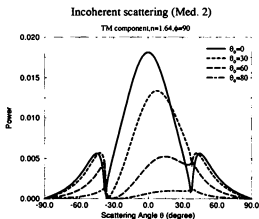


図 5.8: 誘電体表面による 1 次散乱分布 (媒質 2) の TM 偏波成分 ( $P_1^{2V}$ )、 $+45^\circ$  偏波入射、 $\phi = 90^\circ$

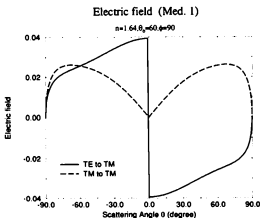


図 5.9: 誘電体表面による散乱波 (媒質 1) の TE 偏波成分の電界、 $\theta_0 = 60^\circ, \phi = 90^\circ$

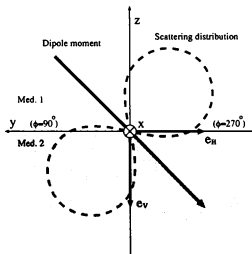


図 5.10: 表面に誘起された電気双極子による放射

## 第 6 章

### 結論

本論文では不規則表面による電磁波散乱を確率汎関数法を用いて解析した。不規則表面は 2 次元確率場で表されるものとし、電磁波の偏波を考慮に入れ、ベクトル波として取り扱った。2 次元不規則表面による散乱波はあらゆる方向に生じるので、3 次元問題となる。また、電磁界は各点で方向をもつベクトル場であるので理論が複雑となり、形式的には解が得られても実際に散乱分布を数値計算することが困難となる場合がほとんどであったが、本論文では様々な場合における数値計算結果を示した。

第 2 章では、不規則完全導体表面による電磁波散乱において、系統的に解を得るために散乱因子表現を導入し、散乱のもつ物理的意味を明確にしつつ、数値計算に適した形式の解を求めた。散乱因子表現を用いると、任意の角度・偏波で入射する場合のあらゆる方向への散乱波の数値計算が容易となる。1 次散乱に加えて、2 次散乱を計算した結果、後方強調散乱が共偏波・交差偏波の両成分にみられることがわかった。また、ベクトル Wiener 核表現を導入することで、確率汎関数法による近似解の導出過程を明確にし、多重散乱を有限個の項で表現可能とするメカニズムについて議論した。第 3,4 章では第 2 章でのベクトル Wiener 核表現での手法を不規則誘電体導波路や不規則誘電体表面による散乱に応用した。これらの場合、不規則表面を透過していく散乱波も考慮する必要があり、完全導体の場合と比べ、より複雑となるがベクトル形式での確率汎関数法を用いることで、系統的に近似解を求めた。誘電体導波路による散乱では、1 次元の場合に存在した随伴強調散乱が 2 次元の場合には存在しないことを明らかにし、また、散乱光干渉の偏波特性について議論した。誘電体表面による散乱では、臨界角方向へ散乱ピークがあることや散乱分布に零点があり Brewster 角と関連をもつことなどを明らかにした。また、臨界角方向の散乱と表面を沿って伝搬するラティラル波の関連を議論し、ラティラル波の影響が顕著となるのは不規則表面で隔てられる 2 つの媒質の屈折率差が小さい場合であることを示した。この場合、中間状態がラティラル波である 2 次散乱の寄与が大きくなり後方強調散乱がみられることも示した。第 5 章では  $+45^\circ$  偏波入射の場合の散乱分布を計算した。不規則表面が統計的に等方、一様であるとしているにも関わらず、散乱分布は入射面に対し非対称となる。この非対称散乱は電界の水平成分に関す



る散乱(水平散乱)と垂直成分に関する散乱(垂直散乱)の干渉によるものであり、電磁波のベクトル波としての性質を顕著に示す例である。

本論文では表面粗さが波長に比べ小さい場合の散乱を解析した。光散乱の場合、一般に表面粗さが波長に比べ大きい場合が多く、Kirchhoff 近似などの初等的な方法で対応可能であったが、近年、波長と同程度またはそれ以下の微細構造の製作が可能となり、微細構造からの光散乱特性の解析の必要性が高まっている。複雑な微細構造を統計的性質が規定された不規則表面であるとして散乱波を近似的に求める方法が、今後、有力な解析手法となりうと思われるが、現時点では、本論文で開発した解析方法が最も実用的かつ理論的にも明解であると考ええる。また、2次元不規則表面による電磁波散乱で共偏波・交差偏波後方強調散乱を確認し、複数の導波モードをもつ2次元誘電体導波路による散乱では随伴強調散乱が存在しないことを明らかにし、2次元不規則誘電体表面による散乱で臨界角方向への散乱ピークが存在や、ラティサル波の寄与による後方強調散乱を見出したのは本論文がはじめてである。また、任意の角度・偏波の入射に対応した散乱分布の計算を可能にし、+45°偏波のように傾いた偏波で入射した場合、不規則表面が等方であっても非対称な散乱が生じること明らかにし、電磁波・光散乱のベクトル波として取り扱うことの重要性を示した。

最後に、本論文で構築した粗さの小さい不規則表面による電磁波散乱理論に関して私見を述べたい。本論文では、自由伝搬モード、臨界角、Brewster 角といった平坦な境界面のもつ特異な性質のほとんどすべてに関連する話題を取り扱うことになったが、これは粗さの小さい不規則面が平坦面の性質を保ちつつ、あらゆる波数成分を入射波に与え非放射成分を含む全方向への散乱波を生じることによって考えられる。システム解析において、白色雑音に対する応答からシステムの特性を同定できることが知られているが、それと同様に、不規則表面による散乱を解析することで、境界面のもつ様々な情報が得られるといえるのではないであろうか。一方、平坦な境界面付近の点光源からの散乱の解析においても、境界面のもつ様々な性質の議論されるが、この場合は基本的に放射波のみを対象としているので、不規則表面散乱の方がより広範囲な現象を含み得るといえる。近年、波長スケール以下の構造からの非放射成分に関する光学、いわゆる、近接場光学が注目されており、回折限界をこえる分解能をもつ顕微鏡や超高密度記録への応用が試みられている。本論文による散乱理論の近接場への適用が今後の課題として挙げられるであろう。

## 謝辞

本研究は 小倉 久直 教授の御指導の下に行なったものであります。終始適切な御指導を下された同教授に厚く御礼申し上げます。中島 將光 助教授、北野 正雄 助教授、宮城 茂幸 助手には数々の御示唆を賜りました。心から感謝致します。本研究の理論から数値計算にわたり御協力頂いた 王 志良 氏、花登 弘和 氏に深く感謝いたします。また、お忙しいところ、論文の査読をして頂いた 吉田 進 教授、松本 絃 教授、橋本 弘蔵 教授に御礼申し上げます。

さらに、小倉研究室に在籍された皆様には様々な面で御支援、御協力を頂きました。ここに心より感謝申し上げます。



## 付録 A

# 波動ベクトルの水平成分による表現

周知のように平面からなる異なる媒質の境界面で電磁波が通過すると、Snell の法則にしたがって屈折現象が生じる。この Snell の法則は境界面上で電磁波の位相が連続であるという条件から導かれるものである。図 A.1 に示すように、境界面において波面は連続であり、境界面に沿って見た波長は不変であるとする

$$\frac{L_1}{\sin \theta_1} = \frac{L_2}{\sin \theta_2} \quad (\text{A.1})$$

となり、 $L_1/L_2 = n_2/n_1$  ( $L_1, L_2$ : 媒質 1, 2 における波長,  $n_1, n_2$ : 媒質 1, 2 の屈折率) より、Snell の法則

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (\text{A.2})$$

が得られる [85]。この屈折現象を波数で議論すると、波数ベクトルの境界面に沿った水平 ( $xy$ ) 成分は不変であるが、媒質によって波数の絶対値は異なるので、図 A.2 に示すように波数ベクトルの向きが不連続に変化し、屈折が起こると説明できる。また、反射に関しても同様の議論が可能である。すなわち、平坦な境界面では境界面で波の伝搬する方向 (波数ベクトル) は変化するが、波数の境界面に沿った成分は不変であるといえる。

次に、境界面が波長に比べて微小な凹凸をもち、振動を受けた平坦面として取り扱える場合を考える。平坦面による反射・屈折波 (0 次波) に加えて、表面の凹凸に応じた回折波が生じる [84]。凹凸が周期的な場合、表面は回折格子となり  $\pm 1$  次の回折波が生じる。この回折現象を波数の境界面 ( $xy$  平面) 成分で議論すると、入射波数ベクトルの水平成分  $\lambda_0$  に、表面の凹凸のもつ波数成分  $\pm \lambda_s$  (Bragg ベクトル) が加算されたもの ( $\lambda_{\pm 1}$ ) が回折波となると説明できる (図 A.3 参照)。また、表面形状が不規則である場合、表面の凹凸はあらゆる波数成分をもつので、あらゆる方向への回折波、すなわち、散乱波が生じると解釈できる。以上のように、微小な凹凸による散乱を波数ベクトルの水平成分で議論すると、表面形状のもつ波数ベクトルが入射波数ベクトルに加算されるという、単純なモデルで理解することが可能となる<sup>1</sup>。本論文では、散乱過程を見通しよく取り扱

<sup>1</sup> 波数の水平 ( $xy$ ) 成分のみで議論が可能となるのは、表面傾斜が小さいという仮定のもとで、不規則表面上における境界条件を近似的に平坦面上のものに置き換えることによる (2.2.1 節参照)。粗さの小さい場合の境界面での位相関係

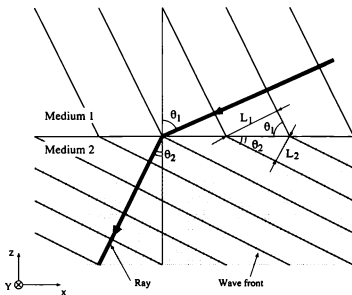


図 A.1: 平坦な境界による屈折

うために、専ら、波数ベクトルの水平成分 $\lambda$ により波動を表現する。

係は水平成分のみが重要となる。波動ベクトルの水平成分が境界条件によって規定され、伝搬定数と水平成分の大きさにより垂直成分が定まると考えることができる。

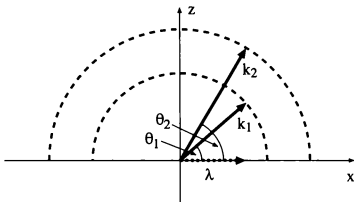


図 A.2: 屈折則の波数空間表現。媒質 1,2 で波数の水平成分 $\lambda$ は共通であるが、波数の大きさが異なるため境界面で波数ベクトルが不連続( $k_1 \rightarrow k_2$ )に変化する。

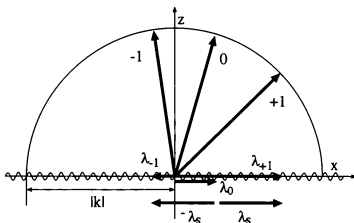


図 A.3: 回折の波数空間表現。入射波 $\lambda_0$ に Bragg ベクトルが加算されて回折波 $\lambda_{\pm 1}$ となる。0, +1, -1 はそれぞれ入射波、回折波の伝搬する方向を表している。



## 付録 B

# Wiener 核における相反定理

解が相反定理を満足するときの Wiener 核が満たすべき関係式を導く。ここでは、 $E_1, E_2$  ともに水平偏波入射である場合を考える。

$$[E]_m \equiv \text{Wiener 積分の } m \text{ 次項 (電界)} \quad (\text{B.1})$$

$$[H]_m \equiv \text{Wiener 積分の } m \text{ 次項 (磁界)} \quad (\text{B.2})$$

$$||_{mn} \equiv \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{S_\rho} \{ [E_1]_m \times [H_2]_n - [E_2]_n \times [H_1]_m \} dx \quad (\text{B.3})$$

とおくと、(2.70) は

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ ||_{mn} + ||_{nm} \} = 0 \quad (\text{B.4})$$

となる。(2.70) の  $x$  に関する積分をすると

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{S_\rho} e^{i(\lambda - \lambda') \cdot x} dx = \delta_{\lambda \lambda'} \quad (\text{B.5})$$

となるので

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m + \lambda'_0 + \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_n = 0 \quad (\text{B.6})$$

を満たす要素のみを考えれば良い。

$m, n \geq 1$  の場合

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \equiv \lambda_M \quad (\text{B.7})$$

$$\lambda'_0 + \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_n \equiv \lambda'_N \quad (\text{B.8})$$

$$A_m^{\text{II}}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m | \lambda_0) \equiv A_M \quad (\text{B.9})$$

$$A_m^{\text{II}}(\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n | \lambda'_0) \equiv A'_N \quad (\text{B.10})$$



$$A_m^V(\lambda_1, \dots, \lambda_m | \lambda_0) \equiv B_M \quad (\text{B.11})$$

$$A_m^V(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m | \lambda'_0) \equiv B'_N \quad (\text{B.12})$$

とする。また、(B.6) より

$$\lambda_M = -\lambda'_N \quad (\text{B.13})$$

以下の計算では外積をとったあとの  $z$  成分のみを考える。

$$\begin{aligned} & [\eta[E_1]_m \times [H_2]_n]_z \quad \text{以後 } z \text{ は省略} \\ &= e^{i\lambda_M \cdot x + iS(\lambda_M)z + i\lambda'_N \cdot x + iS(\lambda'_N)z} \{ e_{II}[\lambda_M]A_M + e_V[\lambda_M]B_M \} \\ & \quad \times \{ e_V[\lambda'_N]A'_N - e_{II}[\lambda'_N]B'_N \} \\ &= e^{2iS(\lambda_M)z} \{ e_{II}[\lambda_M] \times e_V[\lambda'_N]A_M A'_N - e_{II}[\lambda_M] \times e_{II}[\lambda'_N]A_M B'_N \\ & \quad + e_V[\lambda_M] \times e_V[\lambda'_N]B_M A'_N - e_V[\lambda_M] \times e_{II}[\lambda'_N]B_M B'_N \} \\ & \quad (\lambda'_N = -\lambda_M, S(\lambda) = S(-\lambda) \text{ より}) \\ &= -e^{2iS(\lambda_M)z} \frac{S(\lambda_M)}{k} (A_M A'_N + B_M B'_N) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

同様にして

$$\eta[E_2]_n \times [H_1]_m = -e^{2iS(\lambda_N)z} \frac{S(\lambda_N)}{k} (A'_N A_M + B'_N B_M) \quad (\text{B.15})$$

$S(\lambda_N) = S(\lambda_M)$  より  $[\ ]_{mn} + [\ ]_{nm} = 0$  ( $n, m \geq 1$ ) は恒等式となる。よって、(B.4) の  $n$  次の Wiener 核成分は  $[\ ]_{0n} + [\ ]_{n0}$  だけとなる。

$m = n = 0$  の場合

$$\begin{aligned} [E]_0 &= -e_H(k'_0)e^{-iS(\lambda_0)z} + e_H(k_0)e^{iS(\lambda_0)z} \\ & \quad + e_{II}[\lambda_0]A_0^H(\lambda_0)e^{iS(\lambda_0)z} + e_V[\lambda_0]A_0^V(\lambda_0)e^{iS(\lambda_0)z} \\ &= e_{II}[\lambda_0]\{-e^{-iS(\lambda_0)z} + e^{iS(\lambda_0)z}(1 + A_0^H(\lambda_0))\} + e_V[\lambda_0]e^{iS(\lambda_0)z}A_0^V(\lambda_0) \quad (\text{B.16}) \\ & \quad (e_H(k'_0) = e_H(k_0) = e_{II}[\lambda_0] \text{ より}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta[H]_0 &= -e_V(k'_0)e^{-iS(\lambda_0)z} + e_V(k_0)e^{iS(\lambda_0)z} \\ & \quad + e_V[\lambda_0]A_0^H(\lambda_0)e^{iS(\lambda_0)z} - e_{II}[\lambda_0]A_0^V(\lambda_0)e^{iS(\lambda_0)z} \\ &= e_V[\lambda_0]\{e^{-iS(\lambda_0)z} + e^{iS(\lambda_0)z}(1 + A_0^H(\lambda_0))\} - e_{II}[\lambda_0]e^{iS(\lambda_0)z}A_0^V(\lambda_0) \quad (\text{B.17}) \\ & \quad (\text{外積をとって } z \text{ 成分のみを考えるので } e_V \text{ の } xy \text{ 成分のみが必要となる。} \\ & \quad xy \text{ 成分のみ考えると } -e_V(k'_0) = e_V(k_0) = e_V[\lambda_0] \text{ となる}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \eta[E_1]_0 \times [H_2]_0 \\
&= \left[ -e_H[\lambda_0]e^{-iS(\lambda_0)z} + \{e_H[\lambda_0](1 + A_0^H(\lambda_0)) + e_V[\lambda_0]A_0^V(\lambda_0)\} e^{iS(\lambda_0)z} \right] \times \\
&\quad \left[ -e_V[\lambda'_0]e^{-iS(\lambda'_0)z} + \{e_V[\lambda'_0](1 + A_0^H(\lambda'_0)) - e_H[\lambda'_0]A_0^V(\lambda'_0)\} e^{iS(\lambda'_0)z} \right] \\
&\quad \lambda_0 = -\lambda'_0 \text{ より } e_H \times e_V \text{ の項のみ残る} \\
&= e_V[\lambda_0] \times e_H[\lambda_0] \left\{ -(1 + A_0^H(\lambda'_0)) + (1 + A_0^H(\lambda_0)) - e^{-2iS(\lambda_0)z} \right. \\
&\quad \left. + (1 + A_0^H(\lambda'_0))(1 + A_0^H(\lambda_0))e^{2iS(\lambda_0)z} + A_0^V(\lambda_0)A_0^V(\lambda'_0)e^{-2iS(\lambda_0)z} \right\} \quad (B.18) \\
&= e_V[\lambda_0] \times e_H[\lambda_0] \left\{ -A_0^H(\lambda'_0) + A_0^H(\lambda_0) + (*) \right\} \quad (B.19) \\
&\quad \text{ただし } (*) = \\
&\quad -e^{-2iS(\lambda_0)z} + (1 + A_0^H(\lambda'_0))(1 + A_0^H(\lambda_0))e^{2iS(\lambda_0)z} + A_0^V(\lambda_0)A_0^V(\lambda'_0)e^{-2iS(\lambda_0)z}
\end{aligned}$$

同様にして

$$\eta[E_2]_0 \times [H_1]_0 = e_V[\lambda_0] \times e_H[\lambda_0] \left\{ -A_0^H(\lambda_0) + A_0^H(\lambda'_0) + (*) \right\} \quad (B.20)$$

(2.70) は Wiener 積分の各次数成分ごとに成り立つのが、0 次の成分を考えると

$$[\ ]_{00} = 0 \quad (B.21)$$

となる。これに、(B.19), (B.20) を代入すると

$$A_0^H(\lambda'_0) = A_0^H(\lambda_0) \quad (B.22)$$

が得られる。

$m = 0, n \neq 0$  の場合

$$\begin{aligned}
& \eta[E_1]_0 \times [H_2]_n \\
&= e^{iS(\lambda_0)z + iS(\lambda'_0)z} \left[ -e_H[\lambda_0]e^{-2iS(\lambda_0)z} + \{e_H[\lambda_0](1 + A_0^H(\lambda_0)) + e_V[\lambda_0]A_0^V(\lambda_0)\} \right] \\
&\quad \times \{e_V[\lambda'_N]A'_N - e_H[\lambda'_N]B'_N\} \\
&= e^{2iS(\lambda_0)z} e_V[\lambda_0] \times e_H[\lambda_0] \left\{ \left( -e^{-2iS(\lambda_0)z} + 1 + A_0^H(\lambda_0) \right) A'_N + A_0^V(\lambda_0)B'_N \right\} \\
&= e^{2iS(\lambda_0)z} \frac{S(\lambda_0)}{k} \left\{ \left( e^{-2iS(\lambda_0)z} - 1 - A_0^H(\lambda_0) \right) A'_N - A_0^V(\lambda_0)B'_N \right\} \quad (B.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \eta[E_2]_n \times [H_1]_0 \\
&= e^{2iS(\lambda_0)z} \{e_H[\lambda'_N]A'_N + e_V[\lambda'_N]B'_N\} \\
&\quad \times \{e_V[\lambda_0] \left( e^{-2iS(\lambda_0)z} + 1 + A_0^H(\lambda_0) \right) - e_H[\lambda_0]A_0^V(\lambda_0)\} \\
&= e^{2iS(\lambda_0)z} \frac{S(\lambda_0)}{k} \left\{ \left( -e^{-2iS(\lambda_0)z} - 1 - A_0^H(\lambda_0) \right) A'_N - A_0^V(\lambda_0)B'_N \right\} \quad (B.24)
\end{aligned}$$

よって

$$||_{0n} = 2 \frac{S(\lambda_0)}{k} A'_N \quad (\text{B.25})$$

となる。また、同様にして

$$||_{n0} = -2 \frac{S(\lambda'_0)}{k} A_N \quad (\text{B.26})$$

が得られる。(2.70) の  $n$  次成分を考えると

$$||_{0n} + ||_{n0} = 0 \quad (\text{B.27})$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int S(\lambda_0) A_n^{\text{II}}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n | \lambda'_0) \dot{h}_n[dB(\lambda'_1), \dots, dB(\lambda'_n)] \\ & \quad - \int \cdots \int S(\lambda'_0) A_n^{\text{II}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \dot{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \\ & \quad \text{積分変数 } \lambda'_n \text{ を } \lambda_n \text{ に置き換える} \\ & = \int \cdots \int \left\{ S(\lambda_0) A_n^{\text{II}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda'_0) \right. \\ & \quad \left. - S(\lambda'_0) A_n^{\text{II}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \right\} \dot{h}_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

となり、さらに Wiener 積分の直交性 (2.58) より

$$S(\lambda_0) A_n^{\text{II}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda'_0) = S(\lambda'_0) A_n^{\text{II}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \quad (\text{B.29})$$

が得られる。

さらに、一方または両方の入射波の偏波を垂直偏波として同様の計算をすると垂直偏波成分に関わる相反定理の式が得られる。

## 付録 C

# インコヒーレント電力の揺らぎ

標本ごとにみられるインコヒーレント散乱の揺らぎの大きさについて議論する。

1 次散乱のみを考えると、インコヒーレント散乱波動電界は平均零の複素 GAUSS 確率変数となる。散乱波動電界  $E$  の標準偏差を  $\sigma_{ic}$  とすると、互いに独立な 2 つの実 GAUSS 確率変数  $E_r, E_i$  により

$$E = E_r + iE_i \quad (C.1)$$

と表せる。ここで

$$\langle E_r^2 \rangle = \langle E_i^2 \rangle = \frac{\sigma_{ic}^2}{2} \quad (C.2)$$

$$\langle E_r E_i \rangle = 0 \quad (C.3)$$

の関係が成り立つ。

電力は  $|E|^2$  に比例するので、 $|E|^2$  の平均と標準偏差の関係を求める。平均を

$$\langle |E|^2 \rangle = \sigma_{ic}^2 \equiv m_p \quad (C.4)$$

とすると、分散は

$$\langle (|E|^2 - m_p)^2 \rangle = \langle |E|^4 \rangle - m_p^2 \quad (C.5)$$

$$= \langle (|E_r + iE_i| |E_r - iE_i|)^2 \rangle - \sigma_{ic}^4 \quad (C.6)$$

$$= \langle E_r^4 \rangle + \langle E_i^4 \rangle + 2 \langle E_r^2 E_i^2 \rangle - \sigma_{ic}^4 \quad (C.7)$$

$$= \sigma_{ic}^4 = m_p^2 \quad (C.8)$$

となる。ここで GAUSS 確率変数 ( $X_i : i = 1, 2, 3, 4$ ) とその共分散  $R_{ij} = \langle X_i X_j \rangle$  との間で成り立つ公式

$$\langle X_1 X_2 X_3 X_4 \rangle = R_{12} R_{34} + R_{13} R_{24} + R_{14} R_{23} \quad (C.9)$$

を用いた [64]。  $|E|^2$  の標準偏差は平均  $m_p$  と等しくなり、インコヒーレント電力の揺らぎはその平均値と同程度であることがわかる。よって、入射波がコヒーレントである場合には散乱分布の揺

らぎが大きく、後方強調散乱などのピークを確認するには多数の標本に対する測定結果を平均する必要がある [35, 36]。

## 参 考 文 献

- [1] 鶴田匡夫, 応用光学 II, (培風館, 1990), pp.33-39
- [2] I. Newton, 光学, (横書店, 1980), 第 2 編, 第 4 章
- [3] A. F. Harvey, Microwave engineering, Academic press, London and New York (1963), pp.1146-1148
- [4] 古濱洋治, 人工衛星によるマイクロ波リモートセンシング, 電子通信学会誌 63, 475 (1980)
- [5] 岡本隆之, 表面プラズモン顕微鏡とローカルプラズモン顕微鏡, 光学 21, 793 (1992)
- [6] J. A. Sanchez-Gil, A. A. Maradudin, J. Q. Lu, V. D. Freilikher, M. Pustilnik and I. Yurkevich, Scattering of electromagnetic waves from a bounded medium with a random surface, *Phys. Rev. B* 50, 15 353 (1994)
- [7] V. Freilikher, M. Pustilnik and I. Yurkevich, Wave scattering from a bounded medium with disorder, *Phys. Rev. A* 193, 467 (1994)
- [8] Z. L. Wang, H. Ogura and N. Takahashi, Enhanced scattering from a planar waveguide structure with a slightly rough boundary, *Phys. Rev. B* 52, 6027 (1995)
- [9] 木村直史, 三ッ井精一, 島田康憲, 山本邦彦, 神崎修一, 森本弘, 松浦昌孝, 反射型カラー LCD の開発, シヤープ技報 56, 27 (1993)
- [10] 吉住恵一, 村尾次男, 塩谷雅美, 今中良一, 沖野芳弘, 超高精度三次元測定機, 光学 15, 496 (1986)
- [11] 吉住恵一, 金島敬之介, 養鹿浩尚, 超高精度三次元測定機, National Tech. Rep. 36, 232 (1990)
- [12] 奥村一正, 横山晴彦, 植田秀司, 柿崎隆, 堀上秋次, 鈴木規之, 視覚認識装置“Panasisight” シリーズ, National Tech. Rep. 36, 225 (1990)
- [13] 小倉久直, 水谷深, 不規則な 2 次元金属表面による光散乱— 表面プラズモンの動振—, 輻射科学研究会資料 RS-84-1 (1984)

- [14] 小倉久直, 水谷潔, 中山純一, 不規則な2次元金属表面による光散乱 2— 振動を受けた表面プラズモン—, 電磁界理論研究会資料 EMT-83-65 (1983)
- [15] J. Nakayama, K. Mizutani and H. Ogura, Theory of light scattering from a random metal surface: Excitation of surface plasmons in a Ag film, *J. Appl. Phys.* **56**, 1465 (1984)
- [16] J. Nakayama, Anomalous scattering from a slightly random surface, *Radio Sci.* **17**, 558 (1982)
- [17] A. Ishimaru, J. S. Chen, P. Phu and K. Yoshitomi, Numerical, analytical, and experimental studies of scattering from very rough surfaces and backscattering enhancement, *Waves in Random Media* **1**, 91, (1991)
- [18] E. R. Mendez and K. A. O'Donnell, Observation of depolarization and backscattering enhancement in light scattering from Gaussian random surfaces, *Opt. Comm.* **61**, 91 (1987)
- [19] M. E. Knotts and K. A. O'Donnell, Backscattering enhancement from a conducting surface with isotropic roughness, *Opt. Comm.* **99**, 1 (1993)
- [20] J. J. Greffet, Theoretical model of the shift of Brewster angle on a rough surfaces, *Opt. Lett.* **17**, 238 (1992)
- [21] C. Baylard, J. J. Greffet and A. A. Maradudin, Coherent reflection factor of a random rough surface: applications, *J. Opt. Soc. Am.* **A 10**, 2637 (1993)
- [22] J. C. Dainty, The Statistics of Speckle Patterns, in *Progress in Optics XIV* Edi. E. Wolf, North-Holland (1976) pp.1-46
- [23] 長岡洋介, アンダーソン局在, 日本物理学会誌, **40**, 489, (1985)
- [24] 富田誠, 乱れた媒質中での光の揺らぎとアンダーソン局在, 日本物理学会誌 **46**, 927, (1991)
- [25] H. Ogura, Theory of waves in a homogeneous random medium, *Phys. Rev.* **A11**, 942, (1975)
- [26] 岩井俊昭, 岡本卓, 朝倉利光, 光散乱現象研究の展開—単一散乱から多重散乱まで—, 応用物理 **63**, 14 (1994)
- [27] D. L. Jordan and F. Moreno, Enhanced backscattering and cross depolarization from multiscale surfaces, *J. Opt. Soc. Am.* **A 10**, 1989 (1993)
- [28] M. J. Kim, J. C. Dainty, A. T. Friberg and J. Saut, Experimental study of enhanced backscattering from one- and two-dimensional random rough surface, *J. Opt. Soc. Am.* **A 7**, 569 (1990)

- [29] Y. Q. Jin and M. Lax, Backscattering enhancement from a randomly rough surface, *Phys. Rev. B* **42**, 9819 (1990)
- [30] H. Ogura and N. Takahashi, Wave scattering from a random rough surface: reciprocal theorem and backscattering enhancement, *Waves in Random Media* **5**, 223 (1995)
- [31] H. Ogura and N. Takahashi, Scattering, Radiation and Propagation over two-dimensional random surface Stochastic functional approach -, in *PIER* **14** Edi. M. Tateiba and L. Tsang, pp.89-180, EMW Publishing, Cambridge, Mass. U.S.A. (1996)
- [32] E. Akkermans, P. E. Wolf and R. Maynard, Coherent backscattering of light by disordered media: analysys of the peak line shape, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1471 (1986)
- [33] H. Ogura and Z. L. Wang, Surface-plasmon mode on a random rough metal surface: Enhanced backscattering and localization, *Phys. Rev. B* **53**, 10358 (1996)
- [34] H. Hanato, H. Ogura and Z. L. Wang, Scattering from slightly random, one-dimensional metal surface: 45°- linearly polarized incidence, backscattering enhancement and degree of polarization, *Waves in Random Media* **7**, 11 (1997)
- [35] 岡本康行, 山田和弘, 山本繁彦, 後方強調光散乱に関する実験的検討, 輻射科学研究会資料 RS95-16 (1995)
- [36] 岡本康行, 山本繁彦, 低コヒーレント光による後方強調光散乱, 輻射科学研究会資料 RS96-13 (1996)
- [37] J. A. Ogilvy, Theory of wave scattering from random rough surfaces, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York (1990)
- [38] 中山純一, 不規則表面による波動散乱理論, 京都大学工学部 学位論文 (1982)
- [39] 山下栄吉編, 電磁波問題解析の実際, (電子情報通信学会, 1993) 第5章
- [40] 金属表面技術協会編, 金属表面科学 I, (朝倉書店, 1969) pp.97-102
- [41] F. G. Bass and I. M. Fuks, Wave scattering from statistically rough surfaces, Pergamon Press, Oxford (English translation 1979)
- [42] S. O. Rice, Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.* , **4**, 351 (1951)
- [43] A. R. McGurn and A. A. Maradudin, Localization effects in the elastic scattering of light from a randomly rough surface, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 910 (1985)



- [44] V. Celli, A. A. Maradudin, A. M. Marvin and A. R. McGurn, Some aspects of light scattering from a randomly rough metal surface, *J. Opt. Soc. Am.* A **2**, 2225 (1985)
- [45] A. R. McGurn and A. A. Maradudin, Localization effects in the scattering of light from a randomly rough grating, *Phys. Rev.* B **31**, 4866 (1985)
- [46] A. A. Maradudin, T. Michel, A. R. McGurn and E. R. Mendez, Enhanced backscattering of light from a random grating, *Ann. Phys.* **203**, 255 (1990)
- [47] J. A. DeSanto, Exact spectral formalism for rough-surface scattering, *J. Opt. Soc. Am.* A **2**, 2202 (1985)
- [48] G. G. Zipfel and I. M. Fuks, Green's function method for the Helmholtz equation with disturbed boundary conditions, *Radiophys. Qu. Electron.* **13**, 73, in Russian (1970)
- [49] G. G. Zipfel and J. A. DeSanto, Scattering of scalar wave from random rough surface: A diagrammatic approach, *J. Math. Phys.* **13**, 1903 (1972)
- [50] G. S. Brown, Stochastic Fourier transform approach to scattering from perfectly conducting randomly rough surfaces, *IEEE Trans. Antennas and Propag.* **30**, 1135 (1982)
- [51] S. Ito, Analysis of scalar wave scattering from slightly random surfaces: a multiple scattering theory, *Radio Sci.* , **20**, 1 (1985)
- [52] R. P. Feynman, 量子电动力学, (九卷, 1992), 28-29 章
- [53] A. A. Maradudin and D. L. Mills, Scattering and absorption of electromagnetic radiation by a semi-infinite medium in the presence of surface roughness, *Phys. Rev.* B **11**, 1392 (1975)
- [54] G. S. Agawal, Interaction of electromagnetic waves at rough dielectric surfaces, *Phys. Rev.* B **15**, 2371 (1977)
- [55] M. J. Stephen and G. Cwilich, Rayleigh scattering and weak localization: Effects of polarization, *Phys. Rev.* B **34**, 7564 (1986)
- [56] M. Nieto-Vesperinas, Depolarization of electromagnetic waves scattered from slightly rough random surfaces: a study by means of the extinction theorem, *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 539 (1987)
- [57] J. Nakayama, K. Mizutani, and M. Tsuneoka, Scattering of electromagnetic waves from a perfectly conductive slightly random surface: Depolarization in backscattering, *J. Math. Phys.* , **27**, 1435, (1986)

- [58] J. Nakayama, H. Ogura and M. Sakata, A probabilistic theory of electromagnetic wave scattering from a slightly random surface: 1 Horizontal polarization, *Radio Sci.* **16**, 831 (1981)
- [59] J. Nakayama, H. Ogura and M. Sakata, A probabilistic theory of electromagnetic wave scattering from a slightly random surface: 2 Vertical polarization, *Radio Sci.* **16**, 847 (1981)
- [60] 小倉久直, 高橋信行, ランダム表面による波動散乱—相反定理と後方増強散乱—, 輻射科学研究会資料 RS-93-11, (1993)
- [61] 小倉久直, 高橋信行, 2次元ランダム表面上の放射と伝搬問題, 輻射科学研究会資料 RS-92-5, (1992)
- [62] J. van Diggelen, The radiance of lunar objects near opposition, *Planet. Space Sci.* **13**, 271 (1964)
- [63] P. Oetking, Photometric studies of diffusely reflection surfaces with applications to the brightness of the moon, *J. Geophys. Res.* **71**, 2505 (1966)
- [64] 小倉久直, 確率過程論, (コロナ社, 1978)
- [65] 小倉久直, Wiener-Hermite 展開: 理論と応用, システムと制御 **27**, 498, (1983)
- [66] 小倉久直, ウィナー過程・ポアソン過程の汎関数の「コヒーレント状態」表現, 電子情報通信学会誌 J76-A, 993 (1993)
- [67] 笠原皓司, 微分方程式の基礎, (朝倉書店, 1982), pp.94-95
- [68] H. Ogura, T. Kawanishi, N. Takahashi and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic waves from a slightly random surface -- reciprocal theorem, cross polarization and backscattering enhancement, *Waves in Random Media* **5**, 461 (1995)
- [69] T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic waves from a planar waveguide structure with a slightly 2D random surface, *Waves in Random Media* **7**, 35 (1997)
- [70] T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic wave from a slightly random dielectric surface — Yoneda peak and Brewster angle in incoherent scattering —, *Waves in Random Media* **7**, 351 (1997)
- [71] T. Horiuchi, Initial idea to use optical flats for X-ray fluorescence analysis and recent applications to diffraction studies, *Spectrochim. Acta.* **48B**, 129 (1993)

- [72] Y. Yoneda, Anomalous surface reflection of X Rays, *Phys. Rev.* **131**, 2010 (1963)
- [73] O. J. Guentert, Study of the Anomalous surface reflection of X Rays, *J. Appl. Phys.* **36**, 1361 (1965)
- [74] B. E. Warren and J. S. Clarke, Interpretation of the anomalous surface reflection of X Rays, *J. Appl. Phys.* **36**, 324 (1965)
- [75] T. A. Leskova and A. A. Maradudin, *Workshop on Rough Surface Scattering and Related Phenomena* "X-Ray scattering from a randomly rough surface" (California, USA, 1996)
- [76] S. K. Sinha, E. B. Sirota, and S. Garoff, X-ray and neutron scattering from rough surface, *Phys. Rev. B* **38**, 2997 (1988)
- [77] L. B. Felsen and N. Marcuvits, *Radiation and Scattering of Waves*, IEEE press, New Jersey (1994), Chap 5
- [78] 筒井英人, 石原豊彦, 平面誘電体境界における散乱電磁界の一般漸近解, 電気学会 電磁界理論研究会資料 EMT-96-43 (1996)
- [79] E. Gerjuoy, Total reflection of waves from a point source, *Commun. Pure Appl. Math.* **6**, 73 (1953)
- [80] L. M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*, Academic Press, New York (1980), Chap.4
- [81] H. C. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*, Dover, New York (1957), pp.365-367
- [82] T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Polarization characteristics of an electromagnetic waves scattered from a slightly random surface -  $+45^\circ$  polarized incidence -, to be published in *Waves in Random Media* **7** (1997)
- [83] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, John Wiley, (1953), pp.507-512
- [84] 鶴田匡夫, 応用光学 I. (培風館, 1990), pp.292-297
- [85] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* 4th edition, Pergamon Press (1970), pp.36-38

## —著者による論文・学会発表—

- 小倉久直, 高橋信行, 川西哲也, 2次元ランダム平面上の Green 関数と表面上の波動散乱, 電気学会 電磁界理論研究会 EMT-92-52, 1992.10.13
- 川西哲也, 小倉久直, 高橋信行, ランダム表面の電磁波散乱における後方強調散乱について 1, 散乱過程の相反定理 -, 電気学会 電磁界理論研究会 EMT-94-24, 1994.5.21
- 川西哲也, 小倉久直, 高橋信行, ランダム表面の電磁波散乱における後方強調散乱について 2, 電気学会 電磁界理論研究会 EMT-94-28, 1994.7.26
- 川西哲也, 小倉久直, 王志良, 不規則表面をもつ誘電体層による電磁波散乱, 電気学会 電磁界理論研究会 EMT-96-31, 1996.7.17
- 川西哲也, 小倉久直, 王志良, 不規則誘電体表面による電磁波散乱 臨界角とブルースタ角への散乱 -, 電気学会 電磁界理論研究会 EMT-96-45, 1996.10.9
- 川西哲也, 小倉久直, 王志良, 誘電体不規則表面による電磁波散乱 - Yoneda ピークと散乱 Brewster 角 -, 放射科学研究会 RS 96-16, 1996.12.6
- 玉田浩一郎, 松田知也, 大寺泰章, 川西哲也, 北野正雄, 小倉久直, フォトン STM における近接場とプローブの相互作用, レーザ学会学術講演会 23pV2, 1997.1.23
- H. Ogura, M. Kitano, N. Takahashi and T. Kawanishi, Stochastic theory of localized waves in random media, URSI'92, Australia, 17-20 August, 1992
- H. Ogura, T. Kawanishi and N. Takahashi, Backscattering Enhancement in the Electromagnetic Scattering from a Slightly Random Surface, PIERS'95, Seattle, USA, 24-28 July, 1995
- T. Kawanishi, K. Tamada, M. Kitano and Y. Otera, A transmission type PSTM with two light sources, The first Asia-Pacific Workshop on near field optics, Korea, 17-18 August, 1996
- T. Kawanishi, H. Ogura and Z L Wang, Scattering of electromagnetic wave from a planar waveguide structure with slightly random surface, ISAP'96, Chiba, Japan, 24-27 September, 1996
- T. Kawanishi and H. Ogura, Polarization Characteristics of the Electromagnetic Waves Scattered from a Slightly Random Surface +45° Polarized Incidence -, PIERS'97, Hong Kong, 6-9 January, 1997

- T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic wave from a slightly random dielectric surface — Yoneda peak and Brewster angle in incoherent scattering —, PIERS'97, Boston (accepted), 7-11 July, 1997
- H. Ogura, Z. L. Wang and T. Kawanishi, Stochastic functional approach to the integral equation for rough surface scattering, PIERS'97, Boston (accepted), 7-11 July, 1997
- H. Ogura, T. Kawanishi, N. Takahashi and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic waves from a slightly random surface — reciprocal theorem, cross-polarization and backscattering enhancement —, *Waves in Random Media* 5, 461-495 (1995)
- T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic waves from a planar waveguide structure with a slightly 2D random surface, *Waves in Random Media* 7, 35-64 (1997)
- T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic wave from a slightly random dielectric surface — Yoneda peak and Brewster angle in incoherent scattering —, *Waves in Random Media* 7, 351-384 (1997)
- T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Polarization characteristics of an electromagnetic waves scattered from a slightly random surface — +45° polarized incidence —, to be published in *Waves in Random Media* 7 (1997)
- T. Kawanishi, K. Tamada and M. Kitano, Two beam transmission type photon scanning tunneling microscopy, submitted to *Optical Review*